Goffinet Daniel pour CultureMaths

Introduction aux problèmes de Reports de voix

Ce qui suit est raconté avec un vocabulaire "Elections Législatives Françaises" : il y a deux tours, des abstentions, les candidats du second tour sont parmi ceux qui avaient été présents au premier tour

Vous avez tous lu des affirmations comme "53 % des électeurs de Bernard au premier tour ont reporté leurs votes sur Dupont". Les votes étant à bulletins secrets, comment peut-on savoir cela ?

- **Les résultats du Premier Tour constituent un tableau PT de données : on va mettre dans chaque ligne un des bureaux de vote, dans chaque colonne un des candidats du premier tour (la dernière colonne étant pour le candidat "abstention+votes blancs et nuls", noté A ci-dessous)**
- **Les résultats du Second Tour constituent un tableau ST de données : on va mettre dans chaque ligne un des bureaux de vote, dans chaque colonne un des candidats du second tour (la dernière colonne étant pour le candidat "abstention+votes blancs et nuls", noté A ci-dessous)**

- **Les Reports que l'on veut calculer sont des pourcentages : ce sont les reports des électeurs d'un des candidats du premier tour sur un des candidats du second tour, ces reports constituent eux aussi un tabeau R : c'est cela que l'on cherche**

Un exemple simple devrait tout éclairer : les candidats du premier tour sont Bernard, Corinne, Damien (et A(bstention) bien sûr), on a 5 bureaux de vote (dont on suppose ici pour simplifier qu'ils ont tous 100 électeurs)

Premier Tour

	B	C	D	A
Bureau 1 :	30	30	20	20
Bureau 2 :	10	40	40	10
Bureau 3 :	10	50	20	20
Bureau 4 :	10	20	50	20
Bureau 5 :	20	30	30	20

Second Tour

	C	D	A
Bureau 1 :	30	35	35
Bureau 2 :	40	45	15
Bureau 3 :	50	25	25
Bureau 4 :	20	55	25
Bureau 5 :	30	40	30

L'objectif est de "relier" par des pourcentages le tableau PT au tableau ST

Toujours pour simplifier on présume dans un premier temps que les électeurs de C et de D ont maintenu leur préférences, il reste à voir comment se sont répartis ceux de B : dans ce cas (exprès simple) on voit vite qu'une solution consiste à partager à égalité les B entre D et A, cela peut se résumer par les trois tableaux : PT, ST et Reports

R = Reports →

0	**0,5**	**0,5**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**1**

30	**30**	**20**	**20**
10	**40**	**40**	**10**
10	**50**	**20**	**20**
10	**20**	**50**	**20**
20	**30**	**30**	**20**

30	**35**	**35**
40	**45**	**15**
50	**25**	**25**
20	**55**	**25**
30	**40**	**30**

Diverses remarques :

- **les lignes 1 à 5 sont les 5 bureaux de vote**
- **les colonnes de la matrice de gauche "sont" les candidats de PremierTour**
- **les colonnes de la matrice en bas à droite "sont" les candidats de SecondTour**
- **pour lire ce diagramme : vous prenez une ligne du PremierTour, une colonne de Reports et vous ajoutez les produits des valeurs de PT par les pourcentages qui sont dans R pour obtenir (ici exactement) le terme de SecondTour**
- **On n'a bien sûr aucune certitude : les 30 du Bureau 5 qui avaient voté pour C peuvent fort bien avoir choisi D tandis que les 30 de D changaient pour C**
- **on avait 15 valeurs à obtenir dans ST et on disposait de 12 valeurs à régler dans R ... même pas puisque dans chaque ligne la somme vaut 1 (= 100%), on n'avait que 8 choix possibles pour nos 15 conditions**

Ce problème s'écrit en notation matricielle :

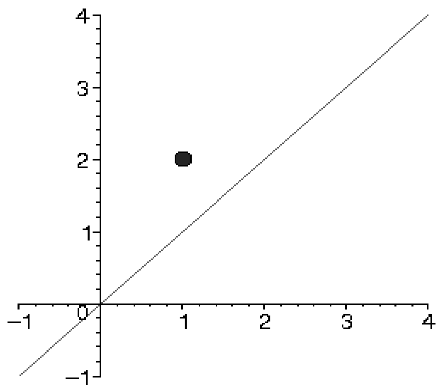
$$\mathbf{PT\ .\ R = ST}$$

PT et ST sont connus c'est R que l'on veut déterminer et les considérations de nombre de valeurs voulues et de nombre de valeurs à régler ont déjà fait deviner qu'il n'y a en général pas de solution

On va donc tenter de faire le "moins mauvais choix"

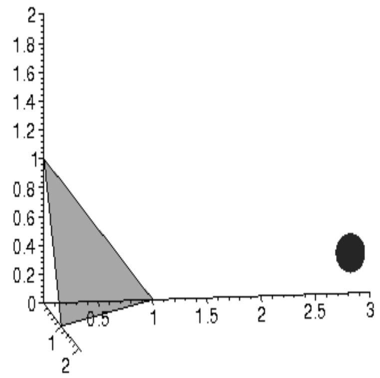
Deux exemples de structure voisines vont aider à voir :

Exemple 1 : je veux résoudre le systèeme $\begin{cases} \mathbf{1.\ r} & \mathbf{=} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1.\ r} & \mathbf{=} & \mathbf{2} \end{cases}$



le point (r,r) (membre de gauche) va se situer sur la diagonale, le point voulu (1,2) - c'est le côté droit - ... n'y est pas! Mais on voit d'évidence quelle est la meilleure approximation de (1,2) par un point de la diagonale : c'est le pied de la perpendiculaire menée de (1,2) sur la diagonale

Exemple 2 : je veux trouver le point du triangle qui est le plus près du gros point



Comme cette fois-ci le triangle est "limité" il ne suffit pas de projeter le point sur le plan du triangle : on tombera à côté, il faudra ensuite chercher le point du bord du triangle le plus proche de notre projection

Le problème du report des voix est une combinaison de ces deux exemples : toutes les possibilités de report constituent "comme une droite ou un plan" dans un espace de possibilités, le résultat du second tour .... est à côté, on projette sur les reports possibles et

- **quand on part de "vrais résultats" de PT et de ST : tout marche bien, le point cherché se trouve déjà dans le super-triangle**
- **quand on prend des données "au hasard" pour tester ... on obtient "toujours" un point qui n'est pas bon : on a des pourcentages < 0 ou $> 100\%$ ... aucun journal ne voudra publier cela!**
- **il faut alors se rapprocher au mieux du "super-triangle" des possibilités-vendables-aux-journaux**

La première opération est effectuée par “pseudo-inverse matriciel”, la seconde est de la “projection convexe”.

Les instituts qui font ce travail ne connaissant pas cela, ils utilisent une méthode approchée dite “de relaxation” qui est extrèmement lente : cela justifie du temps d’ordinateur et des tarifs plus élevés

(ces informations datent d’il y a environ 20 ans, un “sondeur” d’un journal local avait perdu son programme et m’avait contacté pour me demander de lui écrire un programme de relaxation en Turbo Pascal, c’est cela qui m’avait lancé vers ces mathématiques électorales)

Pour lire ce qui suit :

- si vous êtes étudiant en Sup ou Spé ou analogue : commencez par les textes “énoncé” et “corrigé”

- si vous connaissez la géométrie euclidienne (pseudo-inverse, calculs barycentriques) vous trouverez l’étude (presque) complète dans “reports entre tours”