daniel goffinet pour Culture Maths

Pseudo-solutions

L'objectif est d'utiliser l'idée d'espace euclidien pour étudier "les problèmes qui n'ont pas de solutions" :

- quand un système linéaire A.X=B n'a pas de solutions, au lieu de se contenter de constater qu'il n'y a pas de solution, on va chercher le(s) vecteur X dont l'image est aussi proche que possible du second membre
- quand on cherche l'intersection de deux courbes ou surfaces sans points communs ... on cherchera des points de ces objets les plus proches possibles
- trouver la droite passant par 5 point ... non alignés nous amènera à un problème analogue
- la recherche de la perpendiculaire commune de deux droites non concourantes peut ainsi se traiter comme "une intersection ratée"

Je vous affirme également que le calcul des "reports de voix au second tour" est également d'abord un problème de pseudos-solutions, mais l'exigence humaine d'élimination des pourcentages négatifs ajoute une grosse couche de difficultés à la fin

Tous les espaces $\mathbb{R}^N$ qui interviennent ici sont rapportés à leur base canonique et munis du produit scalaire canonique. Si $A \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ elle est identifiée avec l'application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ qui a pour matrice A relativement aux bases canoniques

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y sera noté (x|y), la norme de z notée ||z||

Les résolutions d'applications numériques par la méthode du A 5) sont toutes courtes, les résolutions par des méthodes plus simples (proposées après) comportent nettement plus de calculs.

Des questions de cours qui serviront dans la suite

1 norme et produit scalaire

énoncer et prouver une formule reliant $||u + v||$, $||u||$ et $||v||$ à $(u|v)$

2 espace euclidien et composantes

la base B est orthonormée, x=BX, y=BY; exprimez $(x|y)$, $||x||^2$ et $||x||$ à l'aide de X et Y

A trois systèmes sans solutions

On veut "résoudre au mieux" A.X=B sachant qu'il n'y a pas de solution. L'expression "au mieux" signifie ici que l'on cherche un (ou des) X_0 tel que $||A.X_0 - B|| \leq ||A.X - B||$ pour les autres X

La méthode générale sera illustrée sur les trois cas particuliers des systèmes:

$$(R)\begin{cases} u = 1 \\ u = 2 \\ u = 4 \end{cases} \qquad (S)\begin{cases} \alpha - \beta = -0.9 \\ \alpha + \beta = 3.2 \\ \alpha = 1.1 \\ 2\alpha + \beta = 4.1 \end{cases} \qquad (T)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 8x + 8y + 8z = 8.1 \\ 4x + 4y + 4z = 4.2 \end{cases}$$

1 ré-écritures

a reformuler (R), (S) et (T) sous la forme $A_R X_R = B_R$, $A_S X_S = B_S$, $A_T X_T = B_T$ où $A_R ... B_T$ sont des matrices que l'on précisera

b déterminez les rangs de A_R, A_S, A_T

2 généralités

a prouver que (R) n'a pas de solution

b prouver que (S) n'a pas de solution

c prouver que (T) n'a pas de solution

3 le système (R) fait tout comprendre

a en réinterprétant (R) comme la recherche d'un point d'une droite le plus près possible de (1,2,4) déterminer le meilleur u possible

b en calculant (le carré de) la distance de $\begin{pmatrix} u \\ u \\ u \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ retrouvez le meilleur u possible

4 généralités concernant A , ${}^tAA$, leurs noyaux et leurs images

Pour une quelconque $A \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ prouver successivement que

a $\ker(A) \subseteq \ker({}^tAA)$

b $\mathrm{im}({}^tA) \supseteq \mathrm{im}({}^tAA)$

c $\ker(A) = \ker({}^tAA)$ Aide : passez par ${}^tAAX = 0 \Rightarrow ||AX||^2 = 0$ (à prouver!)

d † $\mathrm{im}({}^tA) = \mathrm{im}({}^tAA)$ Aide : utilisez tout ce qui précède

5 la théorie

Ci-dessous on va progressivement transformer "$||A.X_0 - B||^2$ est minimum", cette expression signifiant que "$||A.X_0 - B||^2$ est minimum parmi tous les $||A.X - B||^2$"

prouver successivement que

a $||A.X_0 - B|^2$ est minimum $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ $\forall H : ||A(X_0 + \lambda H) - B||^2 \geq ||AX_0 - B||^2$

b $||A.X_0 - B||^2$ est minimum $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ $\forall H :$ $2\lambda(AX_0 - B|AH) + \lambda^2||AH||^2 \geq 0$

c $||A.X_0 - B||^2$ est minimum $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ $\forall H : (AX_0 - B|AH) \geq -\lambda||AH||^2$

d $||A.X_0 - B||^2$ est minimum $\Leftrightarrow$ $\forall H : (AX_0 - B|AH) \geq 0$

e $||A.X_0 - B||^2$ est minimum $\Leftrightarrow$ ${}^tAAX_0 = {}^tAB$

Aides pour cette dernière étape : exprimez le produit scalaire matriciellement, changez ${}^tA$ de côté, prenez - H égal à ${}^tAAX_0 - {}^tAB$

6 Application à l'exemple (S)

a appliquez à (S) la méthode de la Question 5

b reprendre directement :

i déterminez une base orthogonale de l'espace des colonnes de A_S

ii utilisez cette base orthogonale pour projeter B_S sur cet espace

la recherche de minimum pour le système (S) peut aussi être interprétée comme la recherche du minimum d'une fonction des deux variables réelles α,β

c **i** écrire explicitement la formule donnant la fonction que l'on veut minimiser (chassez l'inutile racine carrée!)

ii en calculant les dérivées partielles de la fonction précédente, déterminez l'unique point en lequel le minimum peut être atteint

Note : avec cette dernière méthode vous ne sauriez pas prouver que cet éventuel minimum en est bien un

7 Appplication à l'exemple (T)

a appliquez à (T) la méthode de la Question 5

b reprendre directement :

i déterminez une base orthogonale de l'espace des colonnes de A_T

ii utilisez cette base orthogonale pour projeter B_T sur cet espace

c quelle remarque générale aurait pu faire disparaître cette étude de (T)?

la recherche de minimum pour le système (T) peut aussi être interprétée comme la recherche du minimum d'une fonction des trois variables réelles x, y, z

d **i** écrire explicitement la formule donnant la fonction que l'on veut minimiser (chassez l'inutile racine carrée!)

ii en calculant les dérivées partielles de la fonction précédente, déterminez les point en lequel le minimum peut être atteint

B l'intersection de deux courbes planes disjointes

On considère

1. $H_+ = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0, xy = 1\}$
2. $H_- = \{(x, y)|x \leq 0, y \leq 0, xy = 1\}$
3. $H'_- = \{(x, y)|x \leq 0, y \leq 0, (x + 0.1)(y + 0.2) = 1.3\}$

1 de la géométrie

déterminez la distance de H_+ à H_- c'est à dire le minimum des distances entre les M de H_+ et les N de H_-. Il s'agit de prouver "géométriquement" que ce que vous voyez est vrai

2 des calculs

On prend sur H_+ le point M(a) d'abcisse a et sur H'_- le point N(b) d'abcisse b. On considère comme évidente l'existence de points M(a) et N(b) réalisant le minimum de la distance de H_+ à H'_-

a explicitez des vecteurs $\overrightarrow{V}(a)$ et $\overrightarrow{V}(b)$ qui dirigent les tangentes de H_+ à H'_- en M(a) et N(b)

b dérivez partiellement $\overrightarrow{M(a)N(b)}^2$ pour obtenir un système reliant a et b

c éliminez b pour obtenir $(1 + \sqrt{1.3})a^4 - 0.1a^3 + ... - 1 = 0$

d prouvez l'unique existence d'une racine α

e encadrez cet α dans un intervalle de longueur au plus 0.1

C joindre 5 points non alignés

Dans le plan on suppose avoir un ensemble $\mathcal{M}$ de 5 points $M_1...M_5$ et on cherche "la droite la plus proche de cet ensemble de points".

Pour cela on nomme G l'isobarycentre de $M_1...M_5$, on considère un point Ω, un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ et la droite $D(\Omega, \overrightarrow{n})$ d'équation $(\overrightarrow{\Omega M}|\overrightarrow{n})=0$

1 le théorème de Huyghens

a énoncer la formule qui donne la distance d'un point A à la droite $D(\Omega, \overrightarrow{n})$

b exprimer la somme des carrés des distances de $M_1...M_5$ à la droite $D(\Omega, \overrightarrow{n})$: on la notera scd
C'est cette somme de carrés de distance que l'on veut maintenant minimiser

c en introduisant G entre Ω et M_k, prouver que $scd(\boldsymbol{\mathcal{M}},D(\Omega, \overrightarrow{n}))=5(\overrightarrow{\Omega G}|\overrightarrow{n})^2+scd(\boldsymbol{\mathcal{M}},D(G, \overrightarrow{n}))$

d prouver qu'une droite réaisant le minimum de scd doit passer par G

e avec $\overrightarrow{n} = (\cos(\theta),\sin(\theta))$ explicitez la formule donnant $scd(\boldsymbol{\mathcal{M}},D(\Omega, \overrightarrow{n}))$ en fonction de θ

f déterminez le minimum

2 application numérique empirique

On choisit $M_1 = (1, 8)$, $M_2 = (2, 6)$, $M_3 = (3, 13)$, $M_4 = (4, 7)$, $M_5 = (5, 10)$
A l'aide d'un dessin devinez environ quelle est la droite qui approxime le mieux cet ensemble de données

3 application numérique calculée

Utilisez la théorie des questions précédentes pour déterminer celle des droites du plan qui est la plus proche de nos 5 points

D l' intersection de deux droites (non concourantes) en dimension 3

On considère D_1 définie par $\begin{cases} -x & +2y & & = 1 \\ x & -3y & +z & = 2 \end{cases}$ et D_2 définie par $\begin{cases} 3x & +y & +2z & = 4 \\ x & +y & +z & = 2 \end{cases}$

On va déterminer l'intersection de D_1 et D_2 et "si par malheur elles ne se rencontrent pas" on cherchera M_k sur D_k de telle sorte que $||M_1M_2||$ soit le plus petit possible

1 prouver que notre problème n'a pas de solution

2 donner des représentations paramétriques de D_1 et de D_2

3 exhumez de vos mémoires la considération de volume qui permet de calculer la distance des deux droites

4 utilisez les paramétrisations des D_k pour exprimer $||M_1M_2||$ comme une fonction de deux variables dont vous chercherez le minimum

5 si on utilise la technique vue dans la partie A pour pseudo-résoudre $\begin{cases} -x & +2y & & = 1 \\ x & -3y & +z & = 2 \\ 3x & +y & +2z & = 4 \\ x & +y & +z & = 2 \end{cases}$ on obtient x=-13/19, y=5/57 et z=166/57 ce qui n'a aucun rapport ..... pourquoi?

6 une solution de géométrie analytique

a déterminez un vecteur δ orthogonal aux droites D_1 et de D_2

b déterminez A_k sur D_k

c déterminez λ_k tels que le vecteur $(A_2 + \lambda_2\overrightarrow{d_2})$ - $(A_1 + \lambda_1\overrightarrow{d_1})$ soit colinéaire à δ

d prouvez que la longueur que vous venez d'obtenir est bien la plus petite