daniel goffinet
pour Culture
Maths

Corrigés concernant les Pseudo-solutions

Des questions de cours qui serviront dans la suite

1 norme et produit scalaire

$$(\mathrm{u}|\mathrm{v}) = (||\mathrm{u}+\mathrm{v}||^2 - ||\mathrm{u}||^2 - ||\mathrm{v}||^2)/2$$

2 espace euclidien et composantes

$$(\mathrm{x}|\mathrm{y}) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XY} \qquad ||\mathrm{x}||^2 = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XX} \qquad ||\mathrm{x}|| = \sqrt{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{XX}}$$

A trois systèmes sans solutions

1 ré-écritures

a

$$(\mathrm{R}) : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\,\mathrm{u}\,) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{S}) : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9 \\ 3.2 \\ 1.1 \\ 4.1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{T}) : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8.1 \\ 4.2 \end{pmatrix}$$

b $\mathrm{A_R}$ est de rang 1, $\mathrm{A_S}$ de rang 2 (colonnes non liées), $\mathrm{A_T}$ est de rang 1 (espace des colonnes $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$)

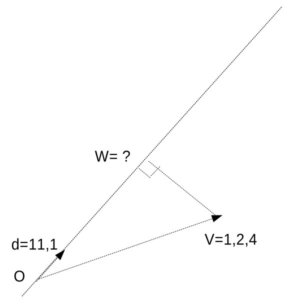
2 généralités

a $\boxed{\text{Si}}$ u est solution de (R) alors les lignes 1 et 2 donnent 1=2 $\boxed{\text{Agaga}}$

b $\boxed{\text{Si}}$ α,β est solution de (S) la ligne 3 donne α=1.1, la ligne 2 donne alors β=2.1, enfin la ligne 1 dit -1=-0.9 $\boxed{\text{Agaga}}$

c $\boxed{\text{Si}}$ x,y,z est solution de (T) la ligne 1 reportée dans la ligne 2 dit 8=8.1 $\boxed{\text{Agaga}}$

3 le système (R) fait tout comprendre



a L'image de $u \to \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(u)$ est une droite Δ de l'espace, le point $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ n'est pas sur Δ on va donc le projeter orthogonalement : $\overrightarrow{w} = \frac{<\overrightarrow{v}|\overrightarrow{d}>\overrightarrow{d}}{||\overrightarrow{d}||^2} = \frac{<\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}>\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{1+1+1}$, on obtient $\overrightarrow{w} = \frac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b la distance au carré est $(u-1)^2 + (u-2)^2 + (u-4)^2$ trinôme dont l'unique minimum est pour u = 7/3

4 généralités concernant A , ${}^tAA$, leurs noyaux et leurs images

a quand $X \in \ker(A)$, $A\,X = 0$ donc ${}^tAAX = 0$

b quand $Y = {}^tAAX$, alors $Y = {}^tAZ$ pour $Z = A\,X$

c on part de ${}^tAAX = 0$ par produit à gauche ${}^tX{}^tAAX = 0$ soit ${}^t(AX)(AX) = 0$, $||AX|| = 0$ soit $AX=0$

d par le b) on a déjà une inclusion, pour avoir l'égalité il suffit donc de l'égalité des dimensions. Mais ker(A)=ker(${}^tAA$) donne dim(ker(A))=dim(ker(${}^tAA$))

Maintenant A et ${}^tAA$ ont même \$ource, on utilise rang(f) = dim(\$f) - dim(ker(f)), et on a rang(A) = rang(${}^tAA$) ZUT on voulait ${}^tA$ mais CHIC A cet ${}^tA$ ont même rang, c'est donc bien gagné

5 la théorie

a $\Rightarrow$ Pour tous les λet H on prend $X = X_0 + \lambda H$ notrte hypothèse dit $||A.X - B|^2 \geq ||A.X_0 - B|^2$, c'est la conclusion

$\Leftarrow$ Pour un X je prend $\lambda = 1$ et $h = X - X_0$, on a bien la conclusion

b on développe le carré

$$||(A.X_0 - B) + \lambda AH||^2 = ||(A.X_0 - B)||^2 + 2\lambda < A.X_0 - B|AH > +\lambda^2||AH||^2$$

il reste à enlever le $||A.X_0 - B|^2$ des deux côtés de l'inégalité

c λétant > 0 on simplifie par λ, il reste $< A.X_0 - B|AH > \geq -\lambda/2||AH||^2$ comme c'est "pour tout λ" on renomme λnotre2

d de c) à d) : comme $(AX_0 - B|AH) \geq -\lambda||AH||^2$ il est encore $\geq$ leur limite qui est 0

de d) à c) tout s'enchaine : $(AX_0 - B|AH) \geq 0 \geq -\lambda||AH||^2$

e comme c'est positif pour tout H, c'est positif pour H et pour -H donc ${}^tH{}^tA(AX_0 - B) = 0$, donc ${}^tA(AX_0 - B)$ est orthogonal à tous les vecteurs, donc à lui même, donc il est nul

f on développe et on fait passer ${}^tAB$ à droite

6 Application à l'exemple (S)

a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -0.9 \\ 3.2 \\ 1.1 \\ 4.1 \end{pmatrix}$ ${}^tAA = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ${}^tAB = \begin{pmatrix} 11.6 \\ 8.2 \end{pmatrix}$ il reste à résoudre ${}^tAAX_0 = {}^tAB$ pour avoir $X_0 = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 18.4 \\ 34.2 \end{pmatrix}$

b

i je nomme A_1 et A_2 les deux colonnes de A, et je les orthonormalise : A_1 donne $A_1/||A_1|| = A_1/\sqrt{7} = e_1$ puis A_2 donne $A_2 - < A_2|e_1 > e_1 = A_2 - (2/7)A1 = \varepsilon_2$ (on normera à la fin seulement)

ii B se projette en B' $= < B|e_1 > e_1 + < B|\varepsilon_2 > \varepsilon_2/||\varepsilon_2||^2$ soit $\frac{92}{85}A_1 + \frac{171}{85}A_2$ ... et on retrouve les 18.4/17 et 34.2/17 vus au §précédent

c

i $D_S(\alpha,\beta) = (\alpha - \beta + 0.9)^2 + (\alpha + \beta - 3.2)^2 + (\alpha - 1.1)^2 + (2\alpha + \beta - 4.1)^2$

ii $\frac{\partial D_S(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}$ vaut 14 α+ 4 β-23.2 $\frac{\partial D_S(\alpha,\beta)}{\partial\beta}$ vaut 4 α+ 6. β- 16.4, la résolution du système formé par ces deux annulations donne α= 92/85 et β= 171/85 (c'est bien pareil)

7 Appplication à l'exemple (T)

a ${}^tA_TA_T = \begin{pmatrix} 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \end{pmatrix}$ et ${}^tA_TB_T = \frac{413}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les solutions du systéme $81\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{413}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont la solution particulière $SP = \begin{pmatrix} 413/405 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on a une base du noyau formée de $BN = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b reprendre directement :

i l'espace des colonnes de A_T est de dimension 1, une base orthogonale (pas b.o.n) en est $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

ii $B_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 8.1 \\ 4.2 \end{pmatrix}$ se projette en $\frac{<B_T|A_T>}{<A_T|A_T>}A_T$ sur cet espace, cela vaut $\frac{82.6}{81}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ et ce vecteur est (entre autres) image de $\frac{413}{405}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (82.6/81 = 413/405) et le noyau est inchangé

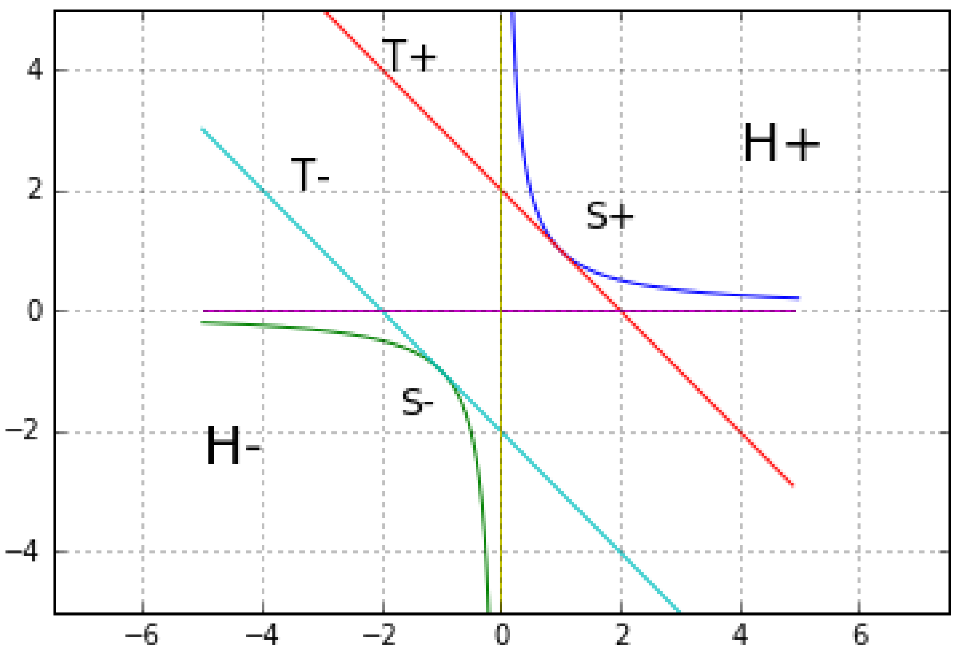
c on avait un problème à UNE variable : x+y+z

d

i $(x + y + z - 1)^2 + (8x + 8y + 8z - 8.1)^2 + (4x + 4y + 4z - 4.2)^2 = D_T$

ii $\frac{\partial D_T(x,y,z)}{\partial x} = 2[(x+y+z-1) + 8(8x+8y+8z-8.1) + 4(4x+4y+4z-4.2)]$ (les deux autres sont identiques), on ne peut avoir de minimum qu'en des M avec $(x + y + z)81 = (1 + 8 \times 8.1 + 4 \times 4.2)$: on retrouvele 82.6/81

B les courbes planes disjointes



1 de la géométrie

La deivée seconde de $x \to 1/x$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$: la branche H+ est convexe. Les théorèmes généraux sur la convexité que H+ est toute entière au dessus de ses tzangentes : en particulier H+ est contenue dans le demi-plan au dessus de T+. De même H- est en dessous de T-. Les demis plans T+plus et T-moins sont distant d'au moins $2\sqrt{2}$ et cette distance est atteinte par les choix de S+ et S-

2 des calculs

a $\overrightarrow{V(a)} = (1, \frac{-1}{a^2})$ et $\overrightarrow{V(b)} = (1, \frac{-1.3}{(b+0.1)^2})$

b $\frac{\partial \overrightarrow{M(a)N(b)}^2}{\partial a} = 2\overrightarrow{M(a)N(b)}. - \overrightarrow{V(a)}$

$\frac{\partial \overrightarrow{M(a)N(b)}^2}{\partial b} = 2\overrightarrow{M(a)N(b)}.\overrightarrow{V(b)}$

on doit donc avoir $\begin{pmatrix} b-a \\ \frac{1.3}{b+0.1} - 0.2 - 1/a \end{pmatrix}$ orthogonal à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/a^2 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1.3/(b+0.1)^2 \end{pmatrix}$

c pour avoir nos deux orthogonalités il faut $\overrightarrow{V(a)}$ et $\overrightarrow{V(b)}$ parallèlles donc $1.3\ a^2 = (b+0.1)^2$ comme $a > 0$ et $b + 0.1 < 0$ on e tire $b =$ -$\sqrt{1.3}a - 0.1$ que l'on reporte dans un des produits scalaires (avec r=$\sqrt{1.3}$)

$$P(a) = (1+r)a^4 + 0.1a^3 - (1+r) - 0.2a = 0$$

d (ce qui suit ne fait que traduire en preuve le graphe ...)

Pour $a \leq 0.5$ 1+r entre 2 et 2.2 donne les temes > 0 de P majorés par 2.2/16+0.1/8 alors que le seul -(1+r) est inférieur à -2

Pour $a \geq 0.5$ P'(a) est 'très positif'

enfin P(0.5)< 0 et P(2)> 0 : il y a une unique racine

e $P(1) < 0 < P(1.1)$

C joindre 5 points non alignés

1

a

$d(A,D(\Omega,\ \overrightarrow{n})\ ) = | < \overrightarrow{\Omega A} | \overrightarrow{n} > |$ (car $\overrightarrow{n}$est unitaire, c'est du cours)

b $scd(\boldsymbol{\mathcal{M}},D(\Omega,\ \overrightarrow{n})) = \sum_{1\le k\le 5} < \overrightarrow{\Omega A_k} | \overrightarrow{n} >^2$

c $\sum_{1\le k\le 5} < \overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GA_k} | \overrightarrow{n} >^2 = \sum_{1\le k\le 5} (< \overrightarrow{\Omega G} | \overrightarrow{n} > + < \overrightarrow{GA_k} | \overrightarrow{n} >)^2$

soit $5 < \overrightarrow{\Omega G} | \overrightarrow{n} >^2 + 2 < \overrightarrow{\Omega G} | \overrightarrow{n} > \sum_{1\le k\le 5} < \overrightarrow{GA_k} | \overrightarrow{n} > +\ scd(\boldsymbol{\mathcal{M}},D(G,\ \overrightarrow{n}))$

comme $\sum_{1\le k\le 5} \overrightarrow{GA_k}$ est nul le terùme central part

d le point ωet la direction imposée par $\overrightarrow{n}$peuvent être fixés indépendemment, on minimise $< \overrightarrow{\Omega G} | \overrightarrow{n} >^2$ en prenant Ω= G

e Si $\overrightarrow{GA_k} = x_k \overrightarrow{i} + y_k \overrightarrow{j}$ on obtient $\sum_{1\le k\le 5} (\cos(\theta) x_k + \sin(\theta) y_k)^2$ que l'on développe en $\cos^2(\theta) \sum_{1\le k\le 5} x_k^2 + 2\sin(\theta)\cos(\theta) \sum_{1\le k\le 5} x_k y_k + \sin^2(\theta) \sum_{1\le k\le 5} y_k^2 = \varphi(\theta)$

f je note $X = \sum x_k^2$, $Y = \sum y_k^2$, $S = \sum x_k y_k$

pour $\cos(\theta)$ nul $\varphi(\theta)$ vaut Y, pour $\cos(\theta)$ non nul je note $t=\tan(\theta)$ et $\varphi(\theta) = X\cos^2 + 2S\sin\cos + Y\sin^2$ devient $\frac{X+2tS+t^2Y}{1+t^2}$ on dérive, on trouve deux extrémas $t_\pm = \frac{(X-Y)\pm\sqrt{(Y-X)^2+4S^2}}{-2S}$

2 l'application numérique fournit une pente t_0 vers 4.4 (et $-1/t_0$ pour l'autre)

D l' intersection de deux droites (non concourantes) en dimension 3

1 Le système : $\begin{cases} -x & +2y & & = 1 \\ x & -3y & +z & = 2 \\ 3x & +y & +2z & = 4 \\ x & +y & +z & = 2 \end{cases}$ impose (avec pivot en Ligne1 et Colonne 1) $\begin{cases} -y & +z & = 3 \\ 7y & +2z & = 7 \\ 3y & +z & = 3 \end{cases}$

on prend de nouveau le pivot en Ligne1 et Colonne 1 pour obtenir 9z=28 et 4z=15 qui n'a pas de solution

2 D_1 contient $A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D_2 contient $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3 Le parallelipipede de vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$ peut avoir son volume calculé de deux façons : $|\mathrm{Mixte}(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2})|$ et $\delta.\ |\mathrm{Aire}(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2})|$ d'où δ en divisant

$$\delta = \frac{\left| \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right|}{\left|\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|\right|} = \frac{4}{\sqrt{35}}$$

4 D_1 est parcouru par $M_1(u) = \begin{pmatrix} -1+2u \\ u \\ 3+u \end{pmatrix}$, D_2 est parcouru par $M_2(v) = \begin{pmatrix} 1-v \\ 1-v \\ 2v \end{pmatrix}$, leur distance est $||M_2(v) - M_1(u)||^2 = (2-v-2u)^2 + (1-v-u)^2 + (2v-3-u)^2 = \Delta(u,v)$. La demi-dérivée partielle en u vaut 6u+v-2,la demi-dérivée partielle en v vaut u+6v-9, leur annulation simultanée est un système 2×2 ayant l'unique solution $u_0 = 3/35, v_0 = 52/35$

5 Le système indiqué cherche un $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour minimiser une chose. Le problème à traiter consistait à chercher DEUX points $M = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ pour en minimiser une autre

par contre la recherche du minimum de $||M_2(v) - M_1(u)||^2$ peut se faire par la méthode "^{t}AA

6

a $d_1 \wedge d_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b voir A_1 et A_2 ci-dessus

c on veut $A_2 + \mu\overrightarrow{d_2} - A_1 + \lambda\overrightarrow{d_1}$ lié avec $d_1 \wedge d_2$, cela donne un système de 3 équations aux deux inconnues λ et μ qui a comme unique solution $\lambda_0 = 3/35, \mu_0 = 52/35$

d si P_1 et P_2 sont sur D_1 et D_2 $\overrightarrow{A_1P_1}$ (et $\overrightarrow{A_2P_2}$) est multiple de $\overrightarrow{d_1}$ (et $\overrightarrow{d_2}$) ainsi

$$||\overrightarrow{P_1P_2}||^2 = ||\overrightarrow{P_1(A_1 + \lambda_0 d_1)} + \overrightarrow{(A_1 + \lambda_0 d_1)(A_2 + \mu_0 d_2)} + \overrightarrow{(A_2 + \mu_0 d_2)P_2}||^2$$

comme le teme central est orthogonal aux deux autres Pythagore nous dit

$$||\overrightarrow{P_1P_2}||^2 = ||\overrightarrow{(A_1 + \lambda_0 d_1)(A_2 + \mu_0 d_2)}||^2 + \text{restes des carrés}$$

et le minimum est bien réalisé par le segment de perpendiculaire commune