Le théorème d'Arrow

A Historique

1 En 1790 ....

Condorcet (mathématicien et révolutionnaire) découvrit, comme beaucoup d'autres, la notion de vote d'une assemblée. Il s'apperçut alors que le résultat du vote dépendait, non seulement des opinions des votants, mais aussi de la loi électorale (qui sera nommée ci-dessous "mode de scrutin")

Il voulut y remédier en élaborant "la loi parfaite" et ce faisant il découvrit ce que l'on nomme maintenant le paradoxe de Condorcet

Un exemple en vocabulaire électoral : l'ensemble des candidats est C={a,b,c,d}, l'assemblée des votants est V=$\{v_1, ...v_{27}\}$ et on suppose que, parmi les votants il y en a

5	qui classent les candidats dans l'ordre :	$a > b > c > d$
4	qui classent les candidats dans l'ordre :	$a > c > b > d$
2	qui classent les candidats dans l'ordre :	$d > b > a > c$
6	qui classent les candidats dans l'ordre :	$d > b > c > a$
8	qui classent les candidats dans l'ordre :	$c > b > a > d$
2	qui classent les candidats dans l'ordre :	$d > c > b > a$

On vérifie par de simples additions que

- au scrutin majoritaire à 1 tour d est élu
- au majoritaire à 2 tours c'est a
- au minoritaire à 1 tour c'est b
- au minoritaire à 2 tours c'est c

Comme personne n'utilise de scrutin minoritaire j'en précise la définition : c'est le moins détesté qui est élu

2 ... vers 1830 ....

Une autre future célébrité prit le relais : le révérent père Dogson (alias Lewis Caroll, oncle d'Alice : la première informaticienne de tous les temps), qui était surtout un logicien, comprit ce qui se passait : aucune “bonne loi électorale” ne peut exister. Il l'a parait-il énoncé clairement mais il n'a pas reussi à le prouver

3 ... vers 1930 ....

Un économiste nommé Arrow y est arrivé, c'est essentiellement sa preuve que vous trouverez ci-dessous

4 ... et actuellement

J.Attalli (vers 1970?) a publié un livre de maths électorales qui généralisent le théorème d'Arrow avec des variations d'hypothèses (ordres partiels, opinions manquantes). Par ailleurs les économistes et publicitaires tentent avec énergie d'arriver à .... agglomérer des opinions de façon cohérente pour pouvoir tirer partie de sondages et autres

5 Des champs d'application voisins

Vous connaissez en fait un très grand nombre de lois électorales par le biais du système scolaire : les électeurs sont les diverses matières, voire même chacun des écrits et/ou oraux lors desquels des notes sont attribuées, les candidats sont les étudiants, les lois électorales sont tous les systèmes de barèmes, avec ou non des notes éliminatoires, un bonus pour l'âge, des points reportés à l'oral .... : à la fin il n'y a qu'un classement

Un exemple assez simple aide à comprendre : un feu tricolore est relié à 8 boitiers à trois boutons : R O V. Chaque boitier a un opérateur qui choisit une couleur. Le feu tricolore reçoit donc 8 ordres de couleurs et grâce à un mécanisme mystérieux il choisit une couleur

On a deux hypothèses :

$\boxed{H_1}$ quand les 8 opérateurs choisissent la même couleur, le feu prend cette couleur là

$\boxed{H_2}$ si les 8 opérateurs changent tous leur choix, le feu change de couleur

La conclusion est : le mécanisme mystérieux est très simple : un des 8 boitiers décide la couleur du feu les 7 autres fils ne servent à rien

B l'énoncé d'Arrow

On va noter ci-dessous :

C	l'ensemble des Candidats	n éléments
V	l'ensemble des Votants	p éléments
O	l'ensemble des Opinions : ordres totaux sur C	n! éléments
S	l'ensemble des scrutins : applications de V dans O	$n!^p$ éléments

On notera un ordre s des deux façons usuelles "x s y" et "(x, y) ∈ s" pourront être pensés comme x minore y pour s

Une loi électorale L est une application de S dans O qui rassemble les p opinions en une seule. Il y a donc $n!^{(n!^p)}$ lois électorales possibles.

Pour n=3 et p=3, cela en fait un nombre à 168 chiffres, pour une "élection de chef de classe", n=p=40, on ne peut même pas écrire le nombre de chiffres

Quand s est un scrutin, L(s) est un ordre sur C. On définit ci-dessous 3 propriétés que peut (ou non) avoir une loi électorale :

U $\forall s \in S\ ,\quad L(s) \supseteq \bigcap_{v \in V} s(v)$ ← règle de l'Unanimité

I $\forall (c, c') \in C^2\ ,\ \forall (s, s') \in S^2$: ← règle d'Indépendance

$$[(\forall v \in V : \quad ((c\ s(v)\ c')\ ) \Rightarrow (\ (c\ s'(v)\ c')\ )]$$

$$\Rightarrow$$

$$[(c\ L(s)\ c') \Rightarrow\ (c\ L(s')\ c')]$$

D $\exists d \in V\ \ \forall s \in S\ L(s) = s(d)$ ← loi Dictatoriale

formulé autrement, I dit que si en passant de s à s', la situation de c' vis à vis de c s'est améliorée (il a gardé tous ses partisans), alors le résultat ne doit pas avoir empiré : si c avait gagné la première fois, il ne doit pas avoir perdu du fait de cette amélioration

Le théorème d'Arrow dit que

$$\boxed{(U\ \text{ et }\ I)\ \Rightarrow\ D}$$

D la preuve du théorème d'Arrow en 7 questions

On part donc d'une loi électorale L, on suppose U et I, on suppose aussi qu'il y a au moins 3 candidats, on veut prouver l'existence d'un dictateur. Commençons par introduire une définition : la partie P est décisive pour y contre x si

$$\forall s \in S : \quad [\forall v \in P \quad (x \quad s(v) \quad y)] \quad \Rightarrow [(x \; L(s) \; y)]$$

1 prouver que pour tous les (x,y), V est décisif pour x contre y et pour y contre x

On suppose dans les question 2 à 6 que $\exists s_0 \in S \quad \exists P \subseteq V \quad \exists (x, y) \in C^2$ tels que $[\forall v \in P \quad (x \; s_0(v) \; y)]$ et $[\forall v \notin P \quad (y \; s_0(v) \; x)]$ et $[(x \; L(s_0) \; y)$

2 prouver que P est décisif pour y contre x

On suppose ci-dessous que $x \neq y$

3 Prouver que pour tout z de C, P est décisif pour y contre z. On considèrera pour cela le scrutin u unanime par blocs : pour les v de P $y > x > z$, pour les v de $V \backslash P$ $x > z > y$

4 Comme ci-dessus, montrer que pour tout z de C, P est décisif pour z contre x

On considère maintenant deux quelconques candidats s et t mais $\{s, t\} \neq \{x, y\}$

5 prouver que P est décisif pour s contre t

6 prouver enfin que P est décisif pour toute paire d'éléments de C

On considère maintenant une partie décisive D de cardinal minimum (depuis la première question on sait que cela existe), on sait qu'une telle D est non vide à cause de U, on note $D = \{v_1, \ldots v_k\}$, $E = V \backslash D$, $D' = \{v_1\}$, $D" = D \backslash D'$, il nous reste à prouver que D" est vide. Pour cela on nomme x,y,z trois candidats particuliers et on considère le scrutin s unanime par blocs

pour D' : $x < y < z$ pour D" : $z < x < y$ pour E : $y < z < x$

7 conclure à la preuve finale du théorème d'Arrow

F les bonus

1 l'informatisation d'Arrow

Les problèmes à implémenter sont :

- une loi vérifiant U et I est donnée, trouver d
- une loi vérifiant U et $\neg$D étant donnée fournir un contre exemple à I
- une loi vérifiant I et $\neg$D étant donnée fournir un contre exemple à U

Les question plus précises sont : quelles structures de données utiliser? quelles vont être les complexités des diverses phases? jusqu'à quelles valeurs de n et de p peut-on envisager de traiter cela?

De façon encore plus précise : si on doit parcourir l'ensemble S, comment le faire de la façon la moins coûteuse possible?

2 la structure cachée derrière tout cela ...

... est celle de filtre des parties décisives, pour les feux la preuve a clairement traité la stabilité par intersection, les autres propriétés sont évidentes; pour Arrow la preuve précédente n'est pas rédigée de façon à montrer la structure de filtre. C'est fait pages 33 à 43 du Volume 115 de The American Mathematical Monthly qui traite églement des cas d'ensembles infinis : les ultrafiltres ne sont plus tous ponctuels, s'il existe bien (Zorn) des ultrafiltres majorant le filtre de Frechet, aucun entier n'est dictateur