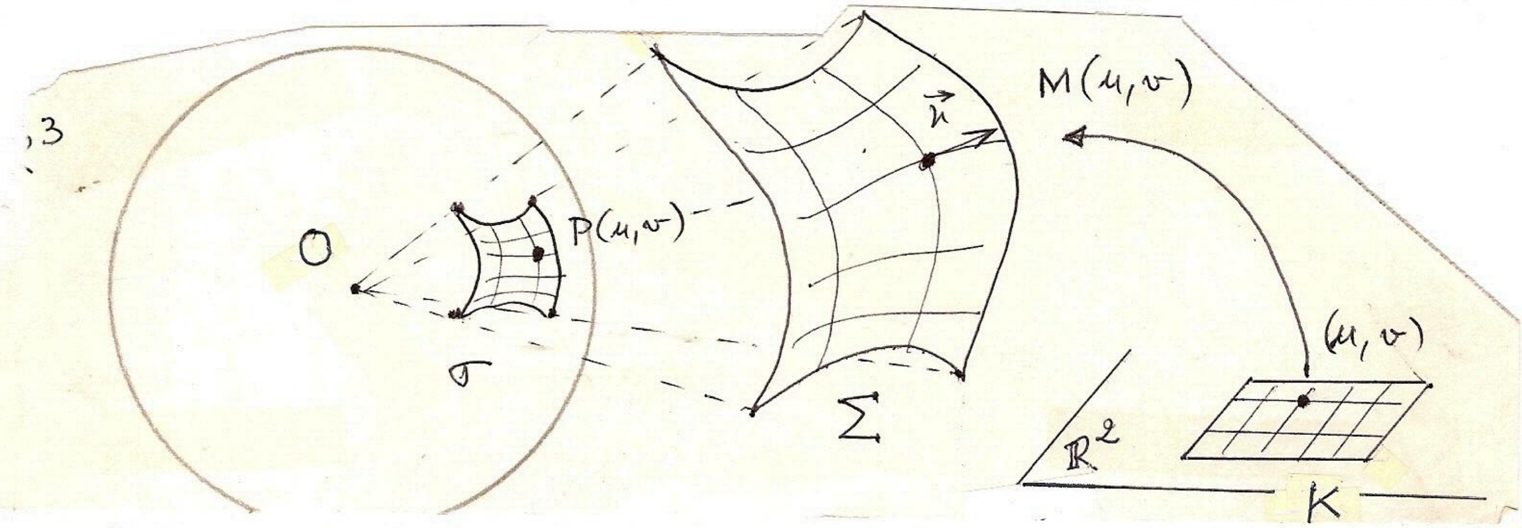
Sup **PCSÎ1**
2011

Angles solides

Vendredi 24 Juin



La nappe paramétrée $\Sigma = (u,v) \to M(u,v)$ est "regardée depuis le point O", ce qui signifie que l'on considère la nappe σ formée des points P(u,v) situés sur une sphère de centre O (=la rétine, l'objectif, les capteurs) qui sont alignés avec O et M : $P(u,v) = O + \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||}$. Ici $||?||$ est la norme euclidienne, $||\overrightarrow{OM}||$ sera noté simplement "r"

On définit l'angle solide de Σ vu de O comme l'aire de σ. On n'abordera pas ici les problèmes de "face cachée de la lune", de replis dans Σ, etc

1 révisions et préliminaires

a calculer $\frac{\partial r}{\partial u}$ (et $\frac{\partial r}{\partial v}$) à l'aide de r, de $\overrightarrow{OM}$ et de ses dérivées partielles

b calculer $\frac{\partial P}{\partial u}$ (et $\frac{\partial P}{\partial v}$) à l'aide de r, de $\overrightarrow{OM}$ et de ses dérivées partielles

Réponse : $\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\overrightarrow{M'_u}}{r} - \frac{<\overrightarrow{OM}|\overrightarrow{M'_u}>\overrightarrow{OM}}{r^3}$

c utilisez la formule du double produit vectoriel : $(u \wedge v) \wedge w = - < v|w > u + < u|w > v$ pour transformer $\frac{\partial P}{\partial u}$ en $\frac{1}{r}(\overrightarrow{\mu} \wedge \overrightarrow{M'_u}) \wedge \overrightarrow{\mu}$ où on a noté $\overrightarrow{\mu} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$

2 calcul de $||\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}||$

a écrire la formule donnant $\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}$

b à l'aide la première définition géométrique du produit vectoriel (composé de trois applications simples) et de $||\mu||$, montrer que les second μ peuvent être supprimés

c utilisez la formule du double produit vectoriel pour transformer $\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}$ en $\frac{1}{r^2} < M'_u|M'_v \wedge \mu > \mu$

d conclure à $||\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}|| = \frac{1}{r^3}|\mathrm{Det}(\overrightarrow{OM}, M'_u, M'_v)|$

Si donc $\overrightarrow{n} = \frac{\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}}{||\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}||}$ on a $\mathcal{A}(\sigma) = \iint_{u,v} < \frac{\overrightarrow{OM}}{r^3}|\overrightarrow{n} > ||M'_u \wedge M'_v||dudv$

On reconnait dans cette formule $\overrightarrow{n}$= le vecteur unitaire normal à Σ en M et en $||M'u \wedge M'_v||$dudv l'élément d'aire dS de cette nappe, si bien que tout ce qui précède se résume en

$$\boxed{\mathcal{A}(\sigma) = \iint_{u,v} < \frac{\overrightarrow{OM}}{r^3}|\overrightarrow{n} > dS}$$

avec la précision "$\overrightarrow{n}$ étant (toujours) orientée de O vers M"

Autre formulation : l'angle solide est le flux de $\frac{\overrightarrow{U}}{r^2}$; si on refait tout ce qui précède en dimension 2, c'est le flux de $\frac{\overrightarrow{u}}{r}$ qui donne l'angle (dans le plan la gravitation serait en $\frac{1}{r}$)

3 vérification sur des cas simples

On nomme K le cube unité $= \{(x,y,z)|\mathrm{Max}(|x|,|y|,|z|) \leq 1\}$. Utilisez l'intégrale précédente pour calculer (ou plutôt retrouver) les angles solides de K vu :

de O=(0,0,0) de $O+\overrightarrow{i}$ de $O + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ de $O+\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ de $O+2\overrightarrow{i}$