Fête de la Science 2008

Le théorème d'Arrow

A Historique

1 En 1790 ....

Condorcet (mathématicien et révolutionnaire) découvrit, comme beaucoup d'autres, la notion de vote d'une assemblée. Il s'apperçut alors que le résultat du vote dépendait, non seulement des opinions des votants, mais aussi de la loi électorale (qui sera nommée ci-dessous "mode de scrutin")

Il voulut y remédier en élaborant "la loi parfaite" et ce faisant il découvrit ce que l'on nomme maintenant le paradoxe de Condorcet

Un exemple en vocabulaire électoral : l'ensemble des candidats est C={a,b,c,d}, l'assemblée des votants est V={v_1, ...v_{27}} et on suppose que, parmi les votants il y en a

5	qui classent les candidats dans l'ordre :	$a > b > c > d$
4	qui classent les candidats dans l'ordre :	$a > c > b > d$
2	qui classent les candidats dans l'ordre :	$d > b > a > c$
6	qui classent les candidats dans l'ordre :	$d > b > c > a$
8	qui classent les candidats dans l'ordre :	$c > b > a > d$
2	qui classent les candidats dans l'ordre :	$d > c > b > a$

On vérifie par de simples additions que

- au scrutin majoritaire à 1 tour d est élu
- au majoritaire à 2 tours c'est a
- au minoritaire à 1 tour c'est b
- au minoritaire à 2 tours c'est c

Comme personne n'utilise de scrutin minoritaire j'en précise la définition : c'est le moins détesté qui est élu

2 ... vers 1830 ....

Une autre future célébrité prit le relais : le révérent père Dogson (alias Lewis Caroll, oncle d'Alice : la première informaticienne de tous les temps), qui était surtout un logicien, comprit ce qui se passait : aucune “bonne loi électorale” ne peut exister. Il l'a parait-il énoncé clairement mais il n'a pas reussi à le prouver

3 ... vers 1930 ....

Un économiste nommé Arrow y est arrivé, c'est sa preuve que vous trouverez ci-dessous

4 ... et actuellement

J.Attalli (vers 1970?) a publié un livre de maths électorales qui généralisent le théorème d'Arrow avec des variations d'hypothèses (ordres partiels, opinions manquantes). Par ailleurs les économistes et publicitaires tentent avec énergie d'arriver à .... agglomérer des opinions de façon cohèrente pour pouvoir tirer partie de sondages et autres

5 Des champs d'application voisins

Vous connaissez en fait un très grand nombre de lois électorales par le biais du système scolaire : les électeurs sont les diverses matières, voire même tous les écrits et tous les oraux lors desquels vous êtes notés, les candidats sont les étudiants, les lois électorales sont tous les systèmes de barèmes, avec ou non des notes éliminatoires, un bonus pour l'âge, des points reportés à l'oral .... : à la fin il n'y a qu'un classement

Un exemple assez simple aide à comprendre : un feu tricolore est relié à 8 boitiers à trois boutons : R O V. Chaque boitier a un opérateur qui choisit une couleur. Le feu tricolore reçoit donc 8 ordres de couleurs et gràce à un mécanisme mystérieux il choisit une couleur

On a deux hypothèses :

quand les 8 opérateurs choisissent la même couleur, le feu prend cette couleur là

si les 8 opérateurs changent tous leur choix, le feu change de couleur

La conclusion est : le mécanisme mystérieux est très simple ! L'un des 8 boitiers décide la couleur du feu les 7 autres fils ne servent à rien

B l'énoncé d'Arrow

On va noter ci-dessous :

C	l'ensemble des Candidats	n éléments
V	l'ensemble des Votants	p éléments
O	l'ensemble des Opinions : ordres totaux sur C	n! éléments
S	l'ensemble des scrutins : applications de V dans O	$n!^p$ éléments

On notera un ordre s des deux façons usuelles "x s y" et "$(x, y) \in s$" pourront être pensés comme x minore y pour s

Une loi électorale L est une application de S dans O qui rassemble les p opinions en une seule. Il y a donc $n!^{(n!^p)}$ lois électorales possibles.

Pour n=3 et p=3, cela en fait un nombre à 168 chiffres, pour une "élection de chef de classe", n=p=40, on ne peut même pas écrire le nombre de chiffres

Quand s est un scrutin, L(s) est un ordre sur C. On définit ci-dessous 3 propriétés que peut (ou non) avoir une loi électorale :

U $\forall s \in S\ ,\quad L(s) \supseteq \bigcap_{v \in V} s(v)$ $\leftarrow$ règle de l'Unanimité

I $\forall (c, c') \in C^2\ ,\ \forall (s, s') \in S^2$: $\leftarrow$ règle d'Indépendance

$$[(\forall v \in V : \quad ((c\ s(v)\ c')\ ) \Rightarrow (\ (c\ s'(v)\ c')\ )]$$

$$\Rightarrow$$

$$[(c\ L(s)\ c') \Rightarrow\ (c\ L(s')\ c')]$$

D $\exists d \in V\ \ \forall s \in S\ L(s) = s(d)$ $\leftarrow$ loi Dictatoriale

formulé autrement, I dit que si en passant de s à s', la situation de c' vis à vis de c s'est améliorée (il a gardé tous ses partisans), alors le résultat ne doit pas avoir empiré : si c avait gagné la première fois, il ne doit pas avoir perdu du fait de cette amélioration

Le théorème d'Arrow dit que

$$\boxed{(U\ \ \text{et}\ \ I)\ \ \Rightarrow\ \ D}$$

C la preuve pour les feux tricolores

Un feu tricolore est relié à 8 boitiers à trois boutons : Rouge Orange Vert.

Chaque boitier a un opérateur qui choisit une couleur. Le feu tricolore reçoit donc 8 ordres de couleurs et gràce à un mécanisme mystérieux il choisit une couleur

On a deux hypothèses :

1. quand les 8 opérateurs choisissent la même couleur, le feu prend cette couleur là
2. si les 8 opérateurs changent tous leur choix, le feu change de couleur

En vocabulaire électoral :

- les candidats sont R O V
- les électeurs sont les 8 opérateurs
- le "mécanisme mystérieux" est la loi électorale
- l'hypothèse 1 est la règle de l'Unanimité
- l'hypothèse 2 est ou non (je n'en sais rien) la traduction de l'Indépendance

La conclusion est : le mécanisme mystérieux est très simple ! L'un des 8 boitiers décide la couleur du feu les 7 autres fils ne servent à rien

En vocabulaire électoral : Il y a un Dictateur

Le nombre 8 de boitiers aurait pu être remplacé par tout autre, le résultat obtenu n'offre pas d'intérêt mais la preuve d'Arrow fait manipuler des classements, celle qui suit manipule des couleurs : ce sera je l'espère plus compréhensible

Une preuve d'Arrow ressemble comme deux gouttes d'eau à celle des feux tricolores, si vous êtes intéressé c'est dans les pages que je vais sauter

Plan de la preuve

On va dire qu'une partie des boitiers est Décisive si la Couleur qui résulte des 8 choix est décidée par les seuls choix de ladite partie. Nous savons donc que Tout = les 8 boitiers est décisif, notre objectif est de passer de Tout à l'un des 8 tout seul

Les 8 boitiers vont être notés $\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc$ et pour commencer on va considérer

$$\overbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc}^{\mathrm{G}}\ \overbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc}^{\mathrm{D}}$$

en divisant en moitiées Gauche et Droite

Je note Coul(ceci,cela) la couleur résultante des choix ceci pour G et cela pour D, deux exemples :

- $\mathrm{Cou}(\mathrm{R_G}, \mathrm{V_D})$ sera la couleur du feu quand la Gauche est monochrome Rouge et la Droite toute Verte
- $\mathrm{Cou}(\mathrm{O_G}, , (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D})$ sera la couleur du feu quand la Gauche est monochrome Orange et la Droite toute Rouge ou Verte = pas d'Orange

Etape 1 On prouve que $\mathrm{Cou}(\mathrm{R_G}, \mathrm{O_D})$ est R ou O, quitte à échanger Gauche et Droite on suppose ci-dessous que c'est R

Etape 2 On prouve que $\mathrm{Cou}(\mathrm{V_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D})$ est V

Etape 3 On prouve que $\mathrm{Cou}(\mathrm{R_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D})$ est R

Etape 4 On prouve que $\mathrm{Cou}(\mathrm{O_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D})$ est O

Etape 5 On prouve que $\mathrm{Cou}(\mathrm{R_G}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_\mathrm{D})$ est R

Etape 6 On prouve que $\mathrm{Cou}((\mathrm{R\ ou\ O})_\mathrm{G}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_\mathrm{D})$ est R ou O (et deux autres)

Etape 7 On prouve que G est décisif

Etape 8 On prouve que quand deux parties sont décisives leur partie commune est encore décisive

Etape 9 On prouve qu'il y a une partie à 2 élements décisive

Etape 10 On prouve qu'il y a une partie à 1 élement décisive

Preuve de l'Etape 1 : On prouve que Cou($\mathrm{R_G, O_D}$) est R ou O

On sait Cou($\mathrm{R_G, R_D}$) = **R et Cou**($\mathrm{O_G, O_D}$) = **O et Cou**($\mathrm{V_G, V_D}$) = **V**

On s'intéresse à Cou($\mathrm{R_G, O_D}$) **: tout a changé depuis le Cou**($\mathrm{V_G, V_D}$)**, le feu n'est donc pas Vert, il est Rouge ou Orange**

quitte à échanger Gauche et Droite on suppose ci-dessous que c'est R, on continue en sachant

$$\mathrm{Cou(R, R, R, R, V, V, V, V) = R}$$

Notons que l'on vient d'utiliser les trois cas d'Unanimité, il va sûrement falloir beaucoup utiliser l'autre hypothèse !

Preuve de l'Etape 2 : On prouve que Cou($\mathrm{V_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D}$) est V

Il résulte de l'Etape 1 que Cou($\mathrm{R_G}, \mathrm{O_D}$) = R, on sait aussi que Cou($\mathrm{O_G}, \mathrm{O_D}$) = O, on connait donc Cou($\mathrm{V_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D}$) : il est différent des deux précédents, c'est donc V

On vient - par exemple - d'obtenir :

$$\mathrm{Cou}(\mathrm{V}, \mathrm{V}, \mathrm{V}, \mathrm{V}, \mathrm{R}, \mathrm{V}, \mathrm{R}, \mathrm{R}) = \mathrm{V}$$

Preuve de l'Etape 3 : On prouve que Cou($R_G, (R \text{ ou } V)_D$) est R

On vient d'obtenir Cou($V_G, (R \text{ ou } V)_D$) = V. Je note rv la répartition de R ou V qui est à droite et $\hat{rv}$ **l'autre répartition de R et V obtenue en permutant R et V.**

On connait donc Cou(V_G, rv) = V et Cou(O_G, O_D) = O on connait donc Cou($R_G, \hat{rv}$) : il est différent des deux précédents, c'est donc R

Mais $\hat{rv}$ **est, comme rv, n'importe quelle distribution de R ou V, on vient donc d'obtenir Cou($R_G, (R \text{ ou } V)_D$) = R**

On vient - par exemple - d'obtenir :

$$\mathrm{Cou}(R, R, R, R, V, R, V, R) = R$$

Preuve de l'Etape 4 : On prouve que Cou($\mathrm{O_G, (R\ ou\ V)_D}$) est O

Je pars de rv une répartition de R ou V, j'en déduis comme ci-dessus $\hat{\mathrm{rv}}$ par permutation R $\leftrightarrow$ V, et j'utilise les deux étapes précédentes pour Cou($\mathrm{V_G}, \hat{\mathrm{rv}}$)=V et Cou($\mathrm{R_G}, \hat{\mathrm{rv}}$)=R, en changeant les huit choix de couleurs on passe à Cou($\mathrm{O_G, rv}$) qui ne peut être que O

On vient - par exemple - d'obtenir :

$$\mathrm{Cou(O, O, O, O, R, R, R, V) = O}$$

Preuve de l'Etape 5 : On prouve que Cou($\mathrm{R_G, (R\ ou\ O\ ou\ V)_D}$) est R

Soit maintenant rov une répartition de R ou O ou V, je fabrique autre-rv une répartition de R ou V qui pour chaque cas est différente de rov : quand rov est R on choisit V, quand rov est V on choisit R, quand rov est O on choisit ... n'importe quoi, les deux étapes précédentes disent que Cou($\mathrm{O_G, autre - rv}$) = O et Cou($\mathrm{V_G, autre - rv}$) = O, en changeant tout on arrive à Cou($\mathrm{R_G, rov}$) = R

On vient d'obtenir :

$$\mathrm{Cou(R, R, R, R, ?, ?, ?, ?) = R}$$

Preuve de l'Etape 6 :
On prouve que Cou($(\mathrm{R\ ou\ O})_{\mathrm{G}}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$) est R ou O (et deux autres)

On a vu lors de l'Etape 2, que Cou($\mathrm{V_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**) =V**

Si on a une répartition $(\mathrm{R\ ou\ O})_{\mathrm{G}}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**), je nomme rov la répartition qui est à droite, comme ci-dessus je fabrique autre-rv une répartition de R ou V qui pour chaque cas est différente de rov et je considère Cou(**$(\mathrm{R\ ou\ O})_{\mathrm{G}}, \mathrm{rov}$**) et Cou(**$\mathrm{V_G}, \mathrm{autre-rv}$**)=V : ils sont différents puisque tout a changé donc**

On vient d'obtenir : Cou($(\mathrm{R\ ou\ O})_{\mathrm{G}}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**) est R ou O**

De la même façon lors des étapes 3 et 4 on a vu Cou($\mathrm{R_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**) =R et Cou(**$\mathrm{O_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**) =O, comme ci-dessus (il faut bien vérifier les rôles des 3 couleurs ne sont pas identiques) on en déduit**

Cou($(\mathrm{O\ ou\ V})_{\mathrm{G}}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**) est O ou V**

Cou($(\mathrm{V\ ou\ R})_{\mathrm{G}}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**) est V ou R**

Preuve de l'Etape 7 : On prouve que G est décisif

Soit g une répartition de couleurs à gauche, d' et d" deux répartitions pour la moitié droite

SI les deux couleurs C'=Cou(g,d') et C"=Cou(g,d") sont différentes

Je choisis alors autre-g une répartition de C' et C" qui pour chaque case est différente de g et autre-d une répartition de R ou O ou V qui est pour chaque case différente des couleurs de d' et de d"

Cou(autre-g,autre-d) est donc différent de C' et C", mais l'étape 6 nous dit justement que autre-g n'ayant que des C' et des C" est soit C' soit C"

AGAGA : on a donc C'=C"

Preuve de l'Etape 8 : On prouve que quand deux parties sont décisives leur partie commune est encore décisive

On ne se limite plus maintenant à des moitié droites ou gauche, les parties concernées peuvent être quelconques

Je suppose que A et B sont deux parties décisives
je note C leur partie commune, Reste tout ce qui n'est ni dans A ni dans B
$A\backslash C$ **est formé des boitiers da A qui ne sont pas dans C et** $B\backslash C$ **est formé des boitiers da B qui ne sont pas dans C**

On considère alors trois répartitions de couleurs :

C	$A\backslash C$	$B\backslash C$	**Reste**	**Couleur**
R	**R**	**O**	**V**	**R (1)**
R	**O**	**R**	**V**	**R (2)**
R	**O**	**O**	**O**	**? (3)**

(1) : comme A est décisif, la couleur résultante est Rouge (2) : comme B est décisif, la couleur résultante est Rouge (3) : comme toutes les couleurs choisies sont non V le résultat est R ou O

- **si c'est R : on se retrouve comme à la fin de l'étape 1 : un Rouge monochrome vient de gagner contre un monochrome, il reste à refaire les étapes 1 à 7 pour conclure à C est décisif**
- $\boxed{\textbf{SI}}$ **c'est O : on se retrouve comme à la fin de l'étape 1 : un Orange monochrome vient de gagner contre un monochrome, il reste à refaire les étapes 1 à 7 pour conclure à Tout-sauf-C est décisif. En ce cas le résultat de la ligne 2 (c'est R) a été décidé par les O R V (et ce indépendemment du début C, c'est l'étape 7), il ne sera donc pas changé en remplaçant le R du début par des O. Mais on a alors O O R V : tout A est Orange, or A est décisif, le résultat doit être O. Comme O n'est pas R** $\boxed{\textbf{AGAGA}}$

Seul le premier des deux cas précédents est possible : C est décisif

Preuve de l'Etape 9 : On prouve qu'il y a une partie à 2 élements décisive

On a déja vu que Gauche (ou Droite) était décisive, on découpe maintenant nos huit cases en $\bigtriangledown$ $\bigtriangledown$ $\bigtriangleup$ $\bigtriangleup$ $\bigtriangledown$ $\bigtriangledown$ $\bigtriangleup$ $\bigtriangleup$

On refait toute la preuve précédente pour obtenir que les $\bigtriangledown$ ou que les $\bigtriangleup$ constituent une partie décisive, en prenant la partie commune avec Gauche (ou Droite) j'obtiens une partie de deux boitiers voisins qui est décisive

Preuve de l'Etape 10 : On prouve qu'il y a une partie à 1 élement décisive

On vient de voir qu'une partie constituée de deux boitiers voisins était décive
on découpe maintenant nos huit cases en $\bigtriangledown\ \bigtriangleup\ \bigtriangledown\ \bigtriangleup\ \bigtriangledown\ \bigtriangleup\ \bigtriangledown\ \bigtriangleup$
On refait toute la preuve précédente pour obtenir que les $\bigtriangledown$ ou que les $\bigtriangleup$ constituent une partie décisive, en prenant la partie commune avec nos deux voisins j'obtiens une "partie de un boitier" qui est décisive : C'est lui le dictateur caché

D la preuve du théorème d'Arrow

On part donc d'un loi électorale L, on suppose U et I, on suppose aussi qu'il y a au moins 3 candidats, on veut prouver l'existence d'un dictateur. Commençons par introduire une définition : la partie P est décisive pour y contre x si

$$\forall s \in S : \quad [\forall v \in P \quad (x \quad s(v) \quad y)] \quad \Rightarrow [(x \; L(s) \; y)]$$

1 prouver que pour tous les (x,y), V est décisif pour x contre y et pour y contre x

On suppose dans les question 2 à 6 que $\exists s_0 \in S \quad \exists P \subseteq V \quad \exists (x, y) \in C^2$ tels que $[\forall v \in P \quad (x \; s_0(v) \; y)]$ et $[\forall v \notin P \quad (y \; s_0(v) \; x)]$ et $[(x \; L(s_0) \; y)]$

2 prouver que P est décisif pour y contre x

On suppose ci-dessous que $x \neq y$

3 Prouver que pour tout z de C, P est décisif pour y contre z. On considèrera pour cela le scrutin u unanime par blocs : pour les v de P $y > x > z$, pour les v de $V \backslash P$ $x > z > y$

4 Comme ci-dessus, montrer que pour tout z de C, P est décisif pour z contre x

On considère maintenant deux quelconques candidats s et t mais $\{s, t\} \neq \{x, y\}$

5 prouver que P est décisif pour s contre t

6 prouver enfin que P est décisif pour toute paire d'éléments de C

On considère maintenant une partie décisive D de cardinal minimum (depuis la première question on sait que cela existe), on sait qu'une telle D est non vide à cause de U, on note $D = \{v_1, ...v_k\}$, E=V\D, $D' = \{v_1\}$, D"=D\D′, il nous reste à prouver que D" est vide. Pour cela on nomme x,y,z trois candidats particuliers et on considère le scrutin s unanime par blocs

pour D' : $x < y < z$ pour D" : $z < x < y$ pour E : $y < z < x$

7 conclure à la preuve finale du théorème d'Arrow

E la preuve d'Arrow

1 Par U, (x,y) étant dans tous les s(v) est dans L(v)

2 Par I, le scrutin s_0 est le pire de ceux lors desquels P a préféré y à x, dans tout autre scrutin l'issue devra être au moins aussi bonne

3 Puisque P est décisif pour y contre x, dans L(u) on aura $y > x$. Comme il y a eu unanimité pour préférer x à z, dans L(u) on aura $x > z$. L(u) est donc $y > x > z$. Ce scrutin u a donc placé y devant z alors que tout $V \setminus P$ voulait le contraire, P est donc décisif pour y contre z

4 On considère le scrutin w unanime par blocs : pour les v de P $z > y > x$, pour les v de $V \setminus P$ $x > z > y$. Par U dans L(w) on aura $z > y$ et par décisivité de P pour y contre x on aura $y > x$. On a donc finalement $z > x$ selon les opinions de P et contre les opinions des autres : P est donc décisif pour z contre x

On considère maintenant deux quelconques candidats s et t mais $\{s, t\} \neq \{x, y\}$

5 parmi s et t l'un (au moins) est un $z \notin \{x, y\}$. d'après la question précédente, P est décisif pour z contre x et pour y contre z. En utilisant de nouveau la question précédente à partir de P décisif pour z contre x on en tire P décisif pour z contre $\{s, t\} \setminus z$ et symétriquement P décisif pour $\{s, t\} \setminus z$ contre z

6 Si m n'est ni x ni y, on utilise la question précédente pour $\{s, t\} = \{x, m\}$ pour montrer que P est décisif pour x contre m, on la réutilise avec $\{s, t\} = \{x, y\}$ par rapport à la paire $\{x, m\}$ et on a P décisif pour x contre y

7 $\boxed{\text{SI}}$ D" est non vide

on peut en effet considérer le scrutin indiqué. Comme D est décisif, on aura $x < y$, si on avait $z < y$ nous autions un scrutin rendant D" décisif pour y contre z, donc décisif (par Q1..Q6), on aura donc $y < z$: d' vient donc d'obtenir $x < z$ contre d" et e, donc (par Q1..Q6) D' est decisif et par notre hypothèse de cardinal minimum D" est vide

$\boxed{\text{AGAGA}}$ D" est donc vide, et v_1 est dictateur

F les bonus

1 l'informatisation d'Arrow

Les problèmes à implémenter sont :

- une loi vérifiant U et I est donnée, trouver d
- une loi vérifiant U et ¬D étant donnée fournir un contre exemple à I
- une loi vérifiant I et ¬D étant donnée fournir un contre exemple à U

Les question plus précises sont : quelles structures de données utiliser? quelles vont être les complexités des diverses phases? jusqu'à quelles valeurs de n et de p peut-on envisager de traiter cela?

De façon encore plus précise : si on doit parcourir l'ensemble S, comment le faire de la façon la moins coûteuse possible?

2 la structure cachée derrière tout cela

est celle de filtre des parties décisives, pour les feux la preuve a clairement traité la stabilité par intersection, les autres propriétés sont évidentes; pour Arrow la preuve précédente n'est pas rédigée de façon à montrer la structure de filtre. C'est fait pages 33 à 43 du Volume 115 de The American Mathematical Monthly qui traite églement des cas d'ensembles infinis : les ultrafiltres ne sont plus tous triviaux