

Description très informelle :

Le sujet est : “voir” combien de fois sont noués deux noeuds issus d’un tore

Cela se prête à expérience et manipulations, quand on a fini d’y réfléchir on voit d’un tout autre oeil les intégrales qui donnent l’indice d’une courbe ou l’angle solide d’une surface

Description informelle :

On dispose d’une chambre à air. On a peint sur cette surface deux courbes :

- la première (bleue) fait “uniformément” deux fois le tour du “trou extérieur du tore” en faisant 3 fois le tour du “trou intérieur”
- la seconde (verte) est comme la première mais décalée : on l’a fait un peu tourner autour du “trou extérieur”

Vous prenez alors en main la lanière bleue (sans tenir la verte) : c’est un double anneau (lui même noué) et vous secouez le tout. La lanière verte (qui est elle-même un noeud) vient pendre en bas du double anneau dont elle fait 3 fois le tour

Vous avez alors en main deux courbes 6 fois enlacées : 2 pour le bleu fois 3 pour la verte ...

Au départ on avait pourtant les courbes bleues et vertes qui étaient identiques ?? d’où vient cette dissymétrie? aurait-on donc 2 fois $3 = 3$ fois 2 ?

Avant de lire les maths :

Allez voir la vidéo nommée “ $2 \times 3 = 3 \times 2$ ” cela vous permettra de voir de quoi il retourne

J’ai bien essayé de l’inclure ici, mais avec TeXLive+TeXStudio j’ai essayé beaucoup de refus. Après en avoir fait un .pdf, je peux insérer ma vidéo ... mais toutes les polices du .pdf se retrouvent changées + les formules sont gribouillées

Description formelle :

On considère dans notre espace un R-r-tore : c'est la surface décrite par un cercle de rayon r qui tourne autour d'une droite de son plan distante de R de son centre

On en utilisera une paramétrisation : $P(\theta, \alpha) = [R + r \cos(\alpha)]\vec{u} + r \sin(\alpha)\vec{k}$ ($0 < r < R$) avec \vec{u} et \vec{k} qui sont les usuels vecteurs des coordonnées cylindriques, les paramètres sont l'angle polaire θ sur le cercle de rayon R ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) et l'angle méridien α sur le cercle méridien de rayon r ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$)

La courbe décrite ci-dessus comme Bleue est la trajectoire de $B(t)=P(2t,3t)$ tandis que Verte est $V(t)=P(\pi/3+2t,3t)$ (les deux fois $0 \leq t \leq 2\pi$)

Les détails de définition du nombre d'entrelac ne sont pas nécessaires à la compréhension de ce qui suit ... mais ils sont bien sûr nécessaires à la détermination de l'intégrale à calculer pour vérifier ce qui va être "prouvé géométriquement"

Le nombre d'entrelac de deux courbes est une généralisation :

- de la notion d'indice d'une courbe fermée : une courbe plane fermée tourne autour de O $\frac{1}{2\pi} \int_C d\theta$ fois (exemples et détails dans l'Appendice 3)
- de la notion d'angle solide : une surface fermée Σ "enveloppe O" $\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} dS$ fois (exemples et détails dans l'Appendice 4)
- le nombre d'entrelac est le degré de $\varphi : (u, t) \rightarrow \frac{f(u)-g(t)}{\|f(u)-g(t)\|}$ c'est à dire N défini par

$$\int_{S^1 \times S^1} \varphi^* dS = N \int_{S^2} dS$$

.(exemples et détails dans l'Appendice 5)

On va estimer numériquement cette intégrale

Je n'ai qu'une référence bibliographique :

[BG] M.Berger and B.Gostiaux, Geometrie differentielle page 280, (Editor : Armand Colin 1972)

Explications sur le dessin de l'Appendice 1

On va déplacer les deux courbes (bien sûr sans qu'elles se rencontrent) jusqu'à arriver à la situation "standard" permettant de calculer le nombre d'entrelac

La première famille de mouvements transforme $B(t) = P(2t, 3t)$ (avec $P(\theta, \alpha) = [R + r \cos(\alpha)]\vec{u} + r \sin(\alpha)\vec{k}$) en $B(m, t) = P(m, 2t, 3t)$ (avec $P(m, \theta, \alpha) = [R + mr \cos(\alpha)]\vec{u} + mr \sin(\alpha)\vec{k}$)

pour $m=1$ $B(1, t)=B(t)$, pour $m=0$ la courbe Bleue s'est contractée sur le "grand cercle" du tore - parcouru deux fois - . Pour $m=1$ B ne rencontre pas V , pour les $m < 1$ la courbe $B(m, ?)$ est strictement à l'intérieur du tore initial donc ne rencontre pas V qui est tracée sur la surface du tore

La seconde famille de mouvements transforme V : on ne doit pas rencontrer le "grand cercle" du tore sur lequel B est maintenant contracté. Pour cela on n'a pas besoin de se déplacer à la surface du tore, on "traverse le trou" (détails horribles : Appendice 2) enfin on tasse la courbe V sur un "petit cercle" méridien du tore - parcouru 3 fois -

Vous êtes maintenant dans la position "canonique" de deux cercles enlacés, l'un parcouru 2 fois, l'autre 3 fois, l'intégrale qui donne le nombre d'entrelac vaut donc 6

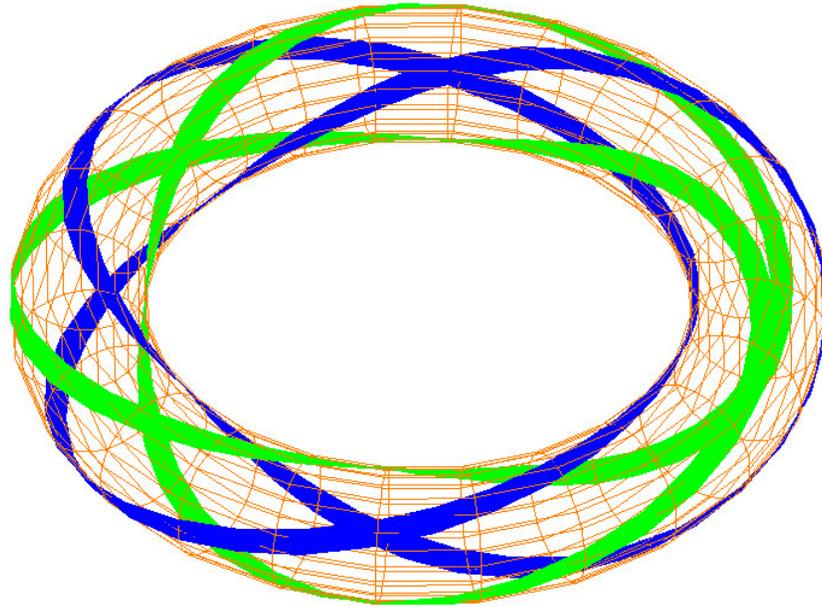
Bien entendu 2 et 3 peuvent être remplacés par p et q pour fournir $p \times q$ entrelacements

programmation de l'homotopie

Tout a été fait avec Maple 12 (puis 14), il y a un fichier joint s'il y a des amateurs

Cela a juste consisté à coder ce qui vient d'être dit ci-dessus. Je n'avais jamais fait autant de trigonométrie de ma vie

Appendice 1 : l'homotopie sans calculs



Sur l'image qui précède vous voyez deux lanières (Bleue et Verte) découpées sur un tore. On croit voir la bleue se recouper, ce n'est pas le cas il y a du dessus de tore et du dessous de tore. De même Bleue et Verte ne se touchent pas

Pour éviter les calculs on peut fabriquer cela (une bouée de plage est parfaite, les vieilles chambres à air sont plus dures à trouver)....

Cela ayant été fait : vous attrapez la lanière bleue ("les deux à la fois" bien qu'il n'y en ait qu'une) sans tenir la Verte et vous secouez : la Verte tombe, vous en répartissez harmonieusement les boucles : ça y est votre homotopie a eu lieu : on vient d'obtenir $2B \times 3V$ et comme le départ était "symétrique" en B et V on doit bien pouvoir maintenant passer à $2V \times 3B$ mais comme on n'y comprend plus rien il est plus sage de revenir à la position bien rangée ci-dessus

Appendice 2 : l'homotopie

Le repère est $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le tore T a son grand cercle C dans xOy de rayon R et un cercle méridien de rayon r , $\vec{u}(\theta) = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j}$

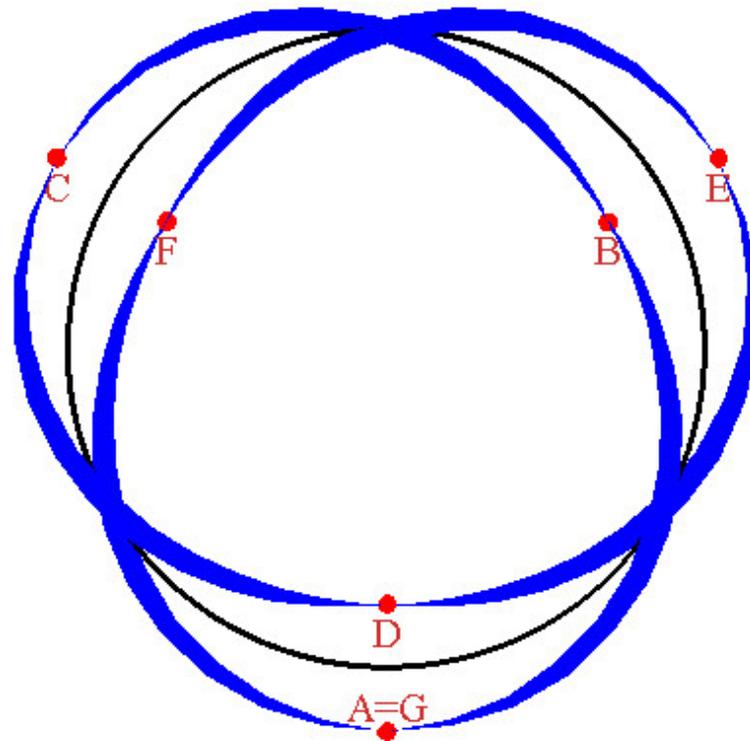
J'échange mes "première et seconde famille de mouvements" : c'est V qui va se rétracter sur le cercle C et c'est B qui va se déformer en un (triple) cercle méridien (unique intérêt : la paramétrisation de B est plus simple)

Sur le dessin ci-dessous V rétractée est la courbe noire, parcourue 2 fois

On a donc $B(t) = [R+r \cos(3t)] \vec{u}(2t) + r \sin(3t) \vec{k}$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$ doit donc être joint à $N(t) = [R+r \cos(3t)] \vec{i} + r \sin(3t) \vec{k}$, les intermédiaires de ce mouvement ne se situant jamais sur C

Sur le dessin ci-dessous N parcourt 3 fois le cercle de diamètre AD

L'homotopie va être décrite par morceaux, à chaque fois les parties de la courbe non mentionnées sont invariantes



Les points A .. G ont pour paramètres A : 0, B : $\pi/3$, C : $2\pi/3$, D : π , E : $4\pi/3$, F : $5\pi/3$, G=A : 2π

Il y a donc deux ambiguïtés : B désigne deux choses (un point et la bande Bleue), et C est à la fois un point et le Cercle noir de rétraction de la bande Verte

Le relief est à voir sur l'image de l'appendice 1

Etape 1 : on bouge l'arc BC, B et C restant fixes

le reste de l'arc traverse le trou extérieur du tore et va se recoller de l'autre côté du tore :

Pour $\pi/3 \leq t \leq 2\pi/3$ on part de $P(2t, 3t)$, on va le joindre "en ligne droite" à $P(2u, 3t)$ avec $u = \pi - 2t$ par :

$$B(m, t) = (1 - m)P(2t, 3t) + mP(2\pi - 4t, 3t)$$

Pour tout m $B(m, 0) = B$ et $B(m, 1) = C$: on n'a donc pas traversé le cercle central

En dehors des t extrêmes la cote de $P(2t, 3t)$ est strictement négative, la cote de $P(2\pi - 4t, 3t)$ est la même, ce mouvement horizontal ne rencontre pas le cercle interdit C

Etape 2 : on bouge l'arc EF, E et F restant fixes

On effectue les mêmes transformations que dans l'Etape 1, avec une symétrie par rapport au plan médiateur de BF

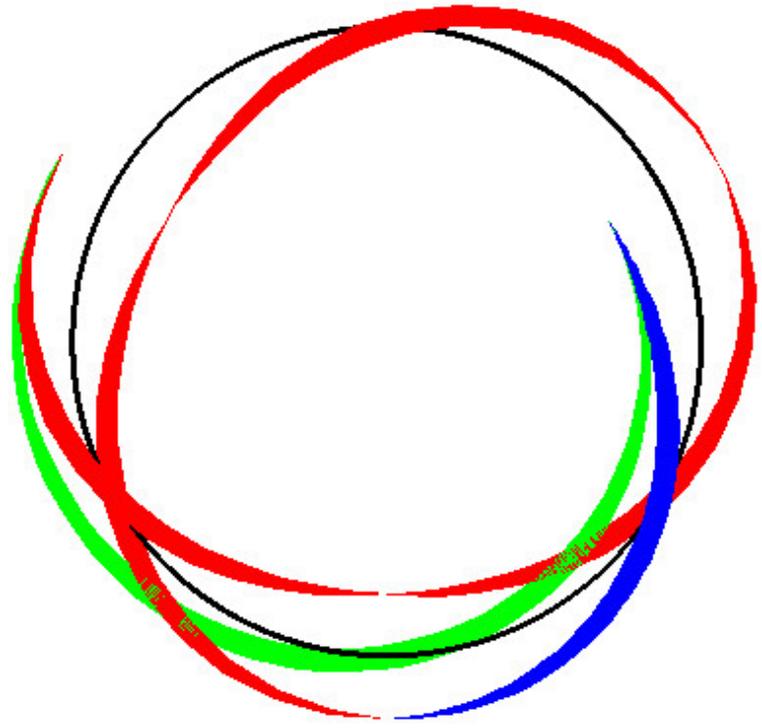
Etape 3 : on rétrécit les θ

On avait un ruban qui faisait le tour (du trou extérieur du tore), on a maintenant un ruban formé de $P(\theta, \alpha)$ avec $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$: il ne fait plus le tour

La dernière étape de l'homotopie va faire passer de nos $P(\theta, \alpha)$ aux $P(0, \alpha)$ par

$$B(m, t) = (1 - m)P(\theta, \alpha) + mP(0, \alpha) \quad m \in [0..1]$$

Comme tout reste à la surface du tore on ne rencontre (toujours) pas la courbe C



Appendice 3 : détails de l'évaluation numérique

pour deux courbes paramétrées par f et g la définition [BG] de leur nombre d'entrelac NE est le degré de $\varphi : (u, t) \rightarrow \frac{f(u)-g(t)}{\|f(u)-g(t)\|}$, ici on a donc

$$\int_{S^1 \times S^1} \varphi^* dS = NE \int_{S^2} dS$$

Comme dS j'ai ici $dS = \|(M'_u \wedge M'_t)\| du \wedge dt$, si bien que l'intégrale du membre de droite est 4π (aire de la sphère unité) et qu'il "ne reste plus qu'à" calculer l'intégrale de gauche.

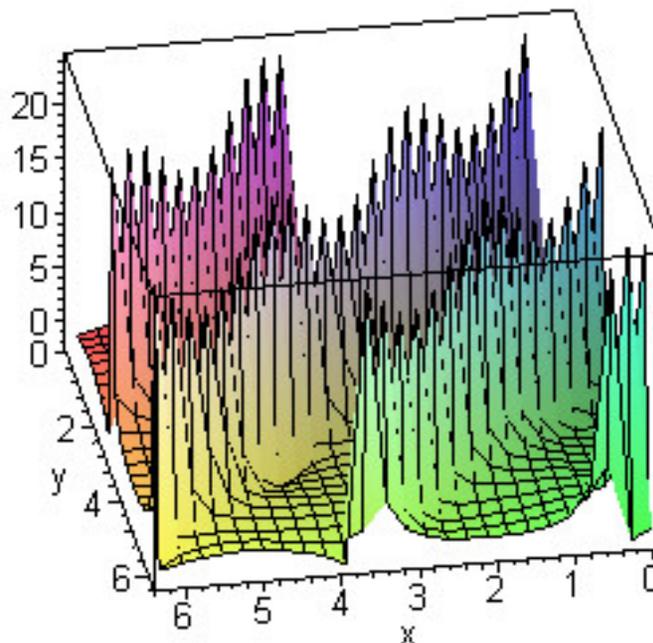
Les "détails" de la formule à utiliser (calculs de dérivées partielles, produits vectoriels, normes) ont été faits par Maple

Dans la version (Maple 12) ci-dessus Maple a su repérer tous les sous arbres égaux de l'arbre syntaxique de ma joyeuse formule, puis et il a refait cela avec les sous arbres et on n'a "que la formule ci-dessus" (Je n'ose vous dire quelle était la formule du temps de Maple 6!)

Pour avoir cela il faut demander le formatage d'affichage : `interface(ptprettyprint=2)`

```
(%2) (-3. (%4) cos(3. y) - 3. cos(3. x) (%5 - %6)) + (%8) (3. cos(3. x) (%9 + %10) + 3. (%12) cos(3. y)) + (-1. sin(3. y) + sin(3. x)) ((%12) (%5 - %6) - 1. (%4) (%9 + %10)
((%2)2 + (%8)2 + (-1. sin(3. y) + sin(3. x))2)3/2
%1 = 1. (5. + cos(3. y)) cos(1.047197551 + 2. y)
%2 = -%1 + (5. + cos(3. x)) cos(2. x)
%3 = 2. (5. + cos(3. x)) cos(2. x)
%4 = -3. sin(3. x) sin(2. x) + %3
%5 = 3. sin(3. y) sin(1.047197551 + 2. y)
%6 = 2. (5. + cos(3. y)) cos(1.047197551 + 2. y)
%7 = 1. (5. + cos(3. y)) sin(1.047197551 + 2. y)
%8 = -%7 + (5. + cos(3. x)) sin(2. x)
%9 = 3. sin(3. y) cos(1.047197551 + 2. y)
%10 = 2. (5. + cos(3. y)) sin(1.047197551 + 2. y)
%11 = 2. (5. + cos(3. x)) sin(2. x)
%12 = -3. sin(3. x) cos(2. x) - %11
```

l'image de la fonction que l'on veut intégrer montre que c'est "juste le genre d'horreurs pour lesquelles l'évaluation numérique est affreuse"



Il va de soi qu'une bonne partie des déchirures est due à un maillage trop gros, mais comme on va justement intégrer naïvement sur un tel maillage, ce sont exactement ces ennuis que l'on va rencontrer

J'ai quand même demandé à Maple `evalf(int ...)` ... et j'ai du rebooter 2 heure plus tard

J'ai donc voulu calculer une intégrale en x seul pour $y=2$... et j'ai du rebooter 2 heure plus tard

J'ai donc repris le même calcul avec `Digits :=4` et j'ai redemandé la même : cela a pris 10 mn

Pour avoir mon estimation de l'intégrale double j'ai pris 10 valeurs de y équiréparties ... et moins de 2 heure plus tard je pouvais ajouter tout cela (multipliés par le δy adapté) et diviser le total par 4π pour obtenir 5.998

Je n'ai fait aucun calcul de majoration d'erreur

Appendice 4 : angle (ou indice) d'une courbe

Quand on veut calculer l'angle (orienté) sous lequel un arc de courbe Γ décrit par $M(t)$ est vu depuis O , on définit $P(t) = O + \frac{\overrightarrow{OM}(t)}{\|\overrightarrow{OM}(t)\|}$ et on calcule "la quantité de P " soit par une invocation du théorème de relèvement, soit (c'est juste pareil) par $\int_C \frac{\text{Det}(\overrightarrow{OM}, d(\overrightarrow{OM}))}{\langle \overrightarrow{OM} | \overrightarrow{OM} \rangle}$ c'est à dire $\int_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$. La forme différentielle que l'on intègre est fermée, elle dérive donc d'un potentiel dans les domaines étoilés ... ne contenant pas O :

- si la courbe ne tourne pas autour de O (par exemple contenue dans un demi-plan évitant O) on utilise le potentiel on trouve 0
- si la courbe fait le tour de O , on se ramène (par homotopies par morceaux dans les demi-plans) à une courbe qui se promène sur le cercle unité, comme l'origine = l'extrémité on a $N2\pi$: ce nombre N est l'indice de la courbe

Exemples : dans le plan \mathbb{C} usuel le cercle $\mathbb{U} : t \rightarrow O + e^{it}$ pour t dans $[0, 6\pi]$ fournit un $N=3$, si on le décale de 1 vers la droite ... N n'est plus défini car la courbe passe par O , si on décale encore de 1 à droite on obtient $N=0$. Voyez comment $2+\mathbb{U}$ ramené sur \mathbb{U} a fait un aller-retour d'un arc de cercle : il y a deux points singuliers

Appendice 5 : angle solide

Quand on veut calculer l'angle solide sous lequel une surface Σ décrite par $M(u,v)$ est vu depuis O (O n'est pas sur Σ) on définit le point P de la sphère unité entre O et M :

$$P(u, v) = O + \frac{\overrightarrow{OM}(u, v)}{\|\overrightarrow{OM}(u, v)\|}$$

et on calcule la quantité de P par $\int \int_{\Sigma} d\sigma(P)$.

Quand on fait (c'est laborieux) le calcul de $\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\|$ on finit par obtenir $\frac{\langle \overrightarrow{OM} | \vec{n} \rangle}{\|\overrightarrow{OM}\|^3}$

Une fois de plus la forme différentielle que l'on intègre est fermée, elle dérive donc d'un potentiel dans les domaines étoilés ... ne contenant pas O :

- si la surface ne tourne pas autour de O (par exemple contenue dans un demi-espace évitant O) on utilise le potentiel-vecteur on trouve 0
- si la surface enferme O , on se ramène (par homotopies par morceaux dans les demi-espaces) à une surface qui se trouve sur la sphère unité qu'elle recouvre un nombre entier de fois : $N4\pi$ C'est ce N que l'on voulait

Exemples : dans l'espace usuel la sphère unité paramétrée avec θ dans $[0..2\pi]$ et φ dans $[-\pi/2, \pi/2]$ (θ et φ sont longitude et latitude) on a M égal à P si bien que : $\int \int_{\Sigma} d\sigma(P)$ vaut 4π et N vaut 1 . Comme dans le plan (voir ci-dessus) si on se déplace de 1 ... raté et si on se déplace de 2 on trouvera 0 : l'angle solide de la lune vue de la terre est 0 ! Quand on parle usuellement de l'angle sous lequel on voit la lune il ne s'agit que de la face visible et l'angle de la partie cachée vient tout annuler (et avec la seule face visible, orientée vers l'extérieur de la lune on a $\langle \overrightarrow{OM} | \vec{n} \rangle$ toujours négatif! ce dont on parle usuellement en est la valeur absolue)

Quand on prend la lune entière les points du contour apparent sont des points singuliers (la nappe voisine s'écrase en une courbe), vus de la terre ils constituent un ensemble de mesure nulle (une courbe d'aire nulle)

Appendice 6 : entrelac

On veut calculer l'entrelac de deux courbes C et C' décrites par $U(u)$ et $V(v)$

(comme C et C' sont fermées les paramètres u et v sont dans S^1 donc (u,v) dans $S^1 \times S^1$: un tore)

On définit alors les vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{U(u)V(v)}}{\|U(u)V(v)\|}$ définissant ainsi une application du tore $S^1 \times S^1$ dans la sphère S^2 et ...

j'essaie qualitativement de dire ce qui se passe : Les points singuliers sont d'image de mesure nulle (comme dans les paragraphes précédents) : c'est le théorème de Sard

En dehors des points singuliers, les morceaux de nappe du tore s'en vont sur des morceaux de nappe de la sphère, "vu qu'il n'y a pas de bord" le nombre de tels morceaux en chaque point de l'image est localement constant (nombre de composantes connexes de la fibre d'un revêtement ... mais il faut tenir compte de l'orientation), donc constant par connexité

(Je viens de tricher : on peut "chiffrer le tore en le repliant" sur la sphère de nombres de fois différents par endroit)

Pour expliquer que ce nombre est bien le nombre d'entrelac ... je ne connais pas mieux que ce que j'ai fait dans les pages précédentes avec les noeuds du tore : l'intégrale est à valeurs dans \mathbb{Z} elle est continue vis à vis de chacune des courbes, par déformation (= homotopies) on se ramène (si on peut) à deux cercles "multiples" entrelacés, il n'y a plus qu'à compter

Les "usuels" problèmes entre homotopie et homologie font que la réciproque est fautive : on peut fort bien avoir une intégrale nulle et des courbes physiquement inséparables (anneaux de Boromé)