La science des choix

Des exemples d'objectifs sont :

1. choisir un député
2. choisir un nom (de marque pour une lessive ou une voiture, pour un lycée)
3. choisir les admis parmi des étudiants qui passent un concours, ou classer les élèves d'une classe

Des problèmes sont :

1. (a) trouver une “loi électorale idéale”
   (b) “calculer” les reports de voix entre les deux tours”
2. tirer une reponse d'une enquête
3. (a) mettre une note à un étudiant absent
   (b) mesurer la qualité d'un ensemble de notes

Bien que ces problèmes semblent tous “manifestement de natures qualitatives” ...

ils vont tous être traités quantitativement

Détails

A Condorcet

Sur les traces du premier à avoir eu conscience du problème, on verra beaucoup d'exemples de choix infaisables

B Arrow

Sur les traces du premier à avoir résolu le problème, on prouvera l'existence d'un dictateur dans divers cas particuliers

C Les choix de noms de marques

Pour les voitures, les lessives, les bières, le tabac ....

D Reports de voix au second tour

Vous avez tous lu des affirmations comme "53 % des électeurs d'Abel au premier tour ont reporté leurs votes sur Dupont". Les votes étant à bulletins secrets, comment peut-on savoir cela ?

E Problèmes docimologiques

1 les absents

Ce qui est presque toujours fait ... est souvent injuste, il y a d'autres méthodes

2 les QCM

... à nombre variable de réponses juste et barème "en distance à la bonne réponse"

3 post-traitement ...

... d'un ensemble de notes

4 mesure de la qualité statistique

Les (moyenne, écart type) se trouvent dans un demi-disque dont les bords (cercle et diamètre) sont "si évidemment mauvais", que l'on imagine que "le centre" devrait être bon

Le paradoxe de Condorcet

impossibilité de classement multicritère

critère	ordre	des	candidats
a	1	2	3
b	2	3	1
c	3	1	2

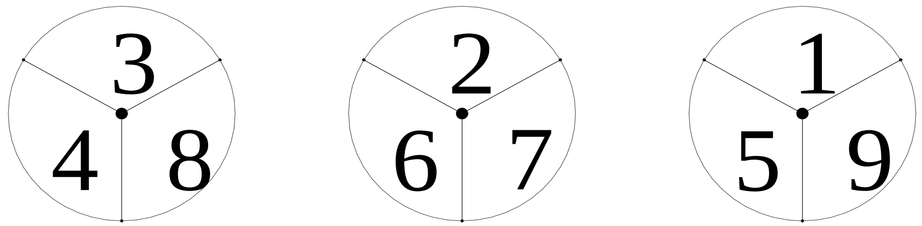
le candidat 1 a battu le candidat 2 deux fois sur trois : sur les critères a et c
le candidat 2 a battu le candidat 3 deux fois sur trois : sur les critères a et b
le candidat 3 a battu le candidat 1 deux fois sur trois : sur les critères b et c

Ce phénomène a été remarqué pour la première fois par Condorcet (mathématicien révolutionnaire qui s'occuppait de l'organisation d'élections vers 1790), vers 1850 cela fut repris par Dogson (== Lewis Caroll == Alice) qui pressentit que l'on pouvait prouver l'impossibilité de classements multicritères

En 1930 c'est Arrow (mathématicien-économiste) qui a prouvé cette impossibilité. Vers 1970 Attali a écrit un livre de généralisation des résultats d'Arrow. Depuis 1980 c'est un sujet de recherche (financé par les publicitaires et les entreprises de sondages)

On dispose de 3 dés équilibrés : chaque face a 1 chance sur 6 de finir dessus

- **le dé A a sur ses faces 3,3,4,4,8,8**
- **le dé B a sur ses faces 2,2,6,6,7,7**
- **le dé C a sur ses faces 1,1,5,5,9,9**



Quand deux dés X et Y sont lancés, on dit que que X gagne sur Y sur ce jet si il (=X) montre (dessus) une valeur supérieure à celle que montre Y

On dit que le dé X est <u>meilleur que</u> le dé Y si dans l'ensemble de toutes les parties X ↔ Y, X a une probabilité de gain supérieure à 0.5
Deux joueurs M(alin) et R(usé) vont jouer, M dit "je vous en prie choisissez votre dé", et R répond "je n'en ferai rien, après vous "

Que doit faire M? Que dire de <u>meilleur que</u>?

Matchs
A =3,4,8
contre
B=2,6,7

	3	**4**	**8**
2	**A**	**A**	**A**
6	**B**	**B**	**A**
7	**B**	**B**	**A**

Matchs
B=2,6,7
contre
C=1,5,9

	2	**6**	**7**
1	**B**	**B**	**B**
5	**C**	**B**	**B**
9	**C**	**C**	**C**

Matchs
C=1,5,9
contre
A =3,4,8

	1	**5**	**9**
3	**A**	**C**	**C**
4	**A**	**C**	**C**
8	**A**	**A**	**C**

Résumé : A est meilleur que B (5 fois sur 9), B est meilleur que C (5 fois sur 9), C est meilleur que A (5 fois sur 9)

Moralité 1 : celui qui choisit un dé va perdre car l'autre pourra en choisir un meilleur que le sien, M(alin) et R(usé) ont tous deux raison de "se faire des politesses"

Moralité 2 : l'expression "meilleur que" se confond aisément avec "plus grand" mais on vient de voir qu'elle n'a pas le même fonctionnement

---

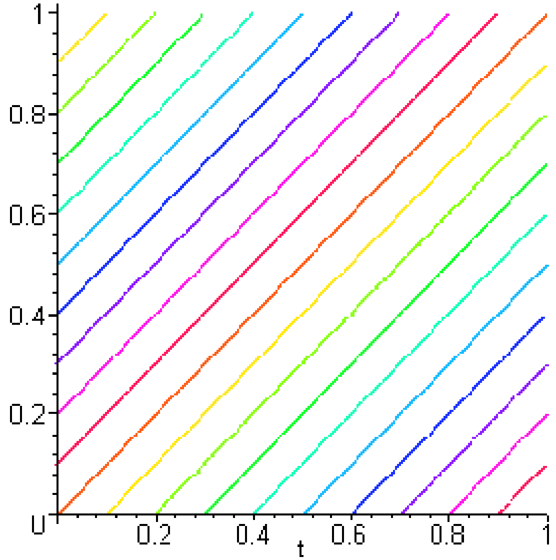
"Bof, 5 fois sur 9 ça ne fait pas une grosse différence ...."

.. alors on en fait encore un avec "9 fois sur 10"

⊞ **programme**

Les deux joueurs ont maintenant à choisir une couleur (orange - début à 0 - est la diagonale du carré, bleu foncé - début à 0.4 - est coupée en deux morceaux, etc).

Quand il auront ainsi choisi, on tirera au sort un point en bas (on peut imaginer une roue de loterie avec les noms des 10 couleurs) , et c'est celui qui aura sa couleur la plus haute (à la verticale de ce point) qui gagnera



Si donc :

le premier choisit Orange ... le second prend Rouge : il gagnera 9 fois sur 10

le premier choisit Rouge ... le second prend Mauve : il gagnera 9 fois sur 10

le premier choisit Mauve ... le second prend Violet : il gagnera 9 fois sur 10

... celui qui choisit le premier a une chance sur 10 de gagner et 9 chances sur 10 de perdre

Fête de la Science 2008

Le théorème d'Arrow

A Historique

1 En 1790 ....

Condorcet (mathématicien et révolutionnaire) découvrit, comme beaucoup d'autres, la notion de vote d'une assemblée. Il s'apperçut alors que le résultat du vote dépendait, non seulement des opinions des votants, mais aussi de la loi électorale (qui sera nommée ci-dessous "mode de scrutin")

Il voulut y remédier en élaborant "la loi parfaite" et ce faisant il découvrit ce que l'on nomme maintenant le paradoxe de Condorcet

Un exemple en vocabulaire électoral : l'ensemble des candidats est C={a,b,c,d}, l'assemblée des votants est V=$\{v_1, ...v_{27}\}$ et on suppose que, parmi les votants il y en a

5	qui classent les candidats dans l'ordre :	$a > b > c > d$
4	qui classent les candidats dans l'ordre :	$a > c > b > d$
2	qui classent les candidats dans l'ordre :	$d > b > a > c$
6	qui classent les candidats dans l'ordre :	$d > b > c > a$
8	qui classent les candidats dans l'ordre :	$c > b > a > d$
2	qui classent les candidats dans l'ordre :	$d > c > b > a$

On vérifie par de simples additions que

- au scrutin majoritaire à 1 tour d est élu
- au majoritaire à 2 tours c'est a
- au minoritaire à 1 tour c'est b
- au minoritaire à 2 tours c'est c

Comme personne n'utilise de scrutin minoritaire j'en précise la définition : c'est le moins détesté qui est élu

2 ... vers 1830 ....

Une autre future célébrité prit le relais : le révérent père Dogson (alias Lewis Caroll, oncle d'Alice : la première informaticienne de tous les temps), qui était surtout un logicien, comprit ce qui se passait : aucune “bonne loi électorale” ne peut exister. Il l'a parait-il énoncé clairement mais il n'a pas reussi à le prouver

3 ... vers 1930 ....

Un économiste nommé Arrow y est arrivé, c'est essentiellement sa preuve que vous trouverez ci-dessous

4 ... et actuellement

J.Attalli (vers 1970?) a publié un livre de maths électorales qui généralisent le théorème d'Arrow avec des variations d'hypothèses (ordres partiels, opinions manquantes). Par ailleurs les économistes et publicitaires tentent avec énergie d'arriver à .... agglomérer des opinions de façon cohèrente pour pouvoir tirer partie de sondages et autres

5 Des champs d'application voisins

Vous connaissez en fait un très grand nombre de lois électorales par le biais du système scolaire : les électeurs sont les diverses matières, voire même chacun des écrits et/ou oraux lors desquels des notes sont attribuées, les candidats sont les étudiants, les lois électorales sont tous les systèmes de barèmes, avec ou non des notes éliminatoires, un bonus pour l'âge, des points reportés à l'oral .... : à la fin il n'y a qu'un classement

Un exemple assez simple aide à comprendre : un feu tricolore est relié à 8 boitiers à trois boutons : R O V. Chaque boitier a un opérateur qui choisit une couleur. Le feu tricolore reçoit donc 8 ordres de couleurs et gràce à un mécanisme mystérieux il choisit une couleur

On a deux hypothèses :

$\boxed{H_1}$ quand les 8 opérateurs choisissent la même couleur, le feu prend cette couleur là

$\boxed{H_2}$ si les 8 opérateurs changent tous leur choix, le feu change de couleur

La conclusion est : le mécanisme mystérieux est très simple : un des 8 boitiers décide la couleur du feu les 7 autres fils ne servent à rien

B l'énoncé d'Arrow

On va noter ci-dessous :

C	l'ensemble des Candidats	n éléments
V	l'ensemble des Votants	p éléments
O	l'ensemble des Opinions : ordres totaux sur C	n! éléments
S	l'ensemble des scrutins : applications de V dans O	$n!^p$ éléments

On notera un ordre s des deux façons usuelles "x s y" et "$(x, y) \in s$" pourront être pensés comme x minore y pour s

Une loi électorale L est une application de S dans O qui rassemble les p opinions en une seule. Il y a donc $n!^{(n!^p)}$ lois électorales possibles.

Pour n=3 et p=3, cela en fait un nombre à 168 chiffres, pour une "élection de chef de classe", n=p=40, on ne peut même pas écrire le nombre de chiffres

Quand s est un scrutin, L(s) est un ordre sur C. On définit ci-dessous 3 propriétés que peut (ou non) avoir une loi électorale :

U $\forall s \in S \ , \quad L(s) \supseteq \bigcap_{v \in V} s(v)$ ← règle de l'Unanimité

I $\forall (c, c') \in C^2 \ , \ \forall (s, s') \in S^2 :$ ← règle d'Indépendance

$$[(\forall v \in V : \quad ((c\ s(v)\ c')\ ) \Rightarrow (\ (c\ s'(v)\ c')\ )]$$

$$\Rightarrow$$

$$[(c\ L(s)\ c') \Rightarrow\ (c\ L(s')\ c')]$$

D $\exists d \in V \ \ \forall s \in S \ L(s) = s(d)$ ← loi Dictatoriale

formulé autrement, I dit que si en passant de s à s', la situation de c' vis à vis de c s'est améliorée (il a gardé tous ses partisans), alors le résultat ne doit pas avoir empiré : si c avait gagné la première fois, il ne doit pas avoir perdu du fait de cette amélioration

Le théorème d'Arrow dit que

$$\boxed{(U \ \text{ et } \ I) \ \Rightarrow \ D}$$

C la preuve pour les feux tricolores

Un feu tricolore est relié à 8 boitiers à trois boutons : Rouge Orange Vert.

Chaque boitier a un opérateur qui choisit une couleur. Le feu tricolore reçoit donc 8 ordres de couleurs et gràce à un mécanisme mystérieux il choisit une couleur

On a deux hypothèses :

1. quand les 8 opérateurs choisissent la même couleur, le feu prend cette couleur là
2. si les 8 opérateurs changent tous leur choix, le feu change de couleur

En vocabulaire électoral :

- les candidats sont R O V
- les électeurs sont les 8 opérateurs
- le “mécanisme mystérieux” est la loi électorale
- l'hypothèse 1 est la règle de l'Unanimité
- l'hypothèse 2 est ou non (je n'en sais rien) la traduction de l'Indépendance

La conclusion est : le mécanisme mystérieux est très simple ! L'un des 8 boitiers décide la couleur du feu les 7 autres fils ne servent à rien

En vocabulaire électoral : Il y a un Dictateur

Le nombre 8 de boitiers aurait pu être remplacé par tout autre, le résultat obtenu n'offre pas d'intérêt, mais la preuve d'Arrow fait manipuler des classements, celle qui suit manipule des couleurs : ce sera je l'espère plus compréhensible

Une preuve d'Arrow ressemble comme deux gouttes d'eau à celle des feux tricolores, si vous êtes intéressé c'est dans les pages que je vais sauter

Plan de la preuve

On va dire qu'une partie des boitiers est Décisive si la Couleur qui résulte des 8 choix est décidée par les seuls choix de ladite partie. Nous savons donc que Tout = les 8 boitiers est décisif, notre objectif est de passer de Tout à l'un des 8 tout seul

Les 8 boitiers vont être notés $\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc$ et pour commencer on va considérer

$$\overbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc}^{\mathrm{G}}\ \overbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc}^{\mathrm{D}}$$

en divisant en moitiées Gauche et Droite

Je note Cou(ceci,cela) la couleur résultante des choix ceci pour G et cela pour D, deux exemples :

- $\mathrm{Cou}(\mathrm{R_G}, \mathrm{V_D})$ sera la couleur du feu quand la Gauche est monochrome Rouge et la Droite toute Verte
- $\mathrm{Cou}(\mathrm{O_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D})$ sera la couleur du feu quand la Gauche est monochrome Orange et la Droite toute Rouge ou Verte = pas d'Orange

Etape 1 On prouve que $\mathrm{Cou}(\mathrm{R_G}, \mathrm{O_D})$ est R ou O, quitte à échanger Gauche et Droite on suppose ci-dessous que c'est R

Etape 2 On prouve que $\mathrm{Cou}(\mathrm{V_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D})$ est V

Etape 3 On prouve que $\mathrm{Cou}(\mathrm{R_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D})$ est R

Etape 4 On prouve que $\mathrm{Cou}(\mathrm{O_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D})$ est O

Etape 5 On prouve que $\mathrm{Cou}(\mathrm{R_G}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_\mathrm{D})$ est R

Etape 6 On prouve que $\mathrm{Cou}((\mathrm{R\ ou\ O})_\mathrm{G}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_\mathrm{D})$ est R ou O (et deux autres analogues)

Etape 7 On prouve que G est décisif

Etape 8 On prouve que : quand deux parties sont décisives, leur partie commune est encore décisive

Etape 9 On prouve qu'il y a une partie à 2 élements décisive

Etape 10 On prouve qu'il y a une partie à 1 élement décisive : on tient le dictateur

Preuve de l'Etape 1 : On prouve que Cou$(\mathrm{R_G}, \mathrm{O_D})$ est R ou O

On sait Cou$(\mathrm{R_G}, \mathrm{R_D})$ **= R et Cou**$(\mathrm{O_G}, \mathrm{O_D})$ **= O et Cou**$(\mathrm{V_G}, \mathrm{V_D})$ **= V**

On s'intéresse à Cou$(\mathrm{R_G}, \mathrm{O_D})$ **: tout a changé depuis le Cou**$(\mathrm{V_G}, \mathrm{V_D})$**, le feu n'est donc pas Vert, il est Rouge ou Orange**

quitte à échanger Gauche et Droite on suppose ci-dessous que c'est R, on continue en sachant

$$\mathrm{Cou}(\mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{V}, \mathrm{V}, \mathrm{V}, \mathrm{V}) = \mathrm{R}$$

Notons que l'on vient d'utiliser les trois cas d'Unanimité, il va sûrement falloir beaucoup utiliser l'autre hypothèse !

Preuve de l'Etape 2 : On prouve que Cou$(\mathrm{V_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D})$ est V

Il résulte de l'Etape 1 que Cou$(\mathrm{R_G}, \mathrm{O_D})$ = R, on sait aussi que Cou$(\mathrm{O_G}, \mathrm{O_D})$ = O, on connait donc Cou$(\mathrm{V_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D})$: il est différent des deux précédents, c'est donc V

On vient - par exemple - d'obtenir :

$$\mathrm{Cou}(\mathrm{V}, \mathrm{V}, \mathrm{V}, \mathrm{V}, \mathrm{R}, \mathrm{V}, \mathrm{R}, \mathrm{R}) = \mathrm{V}$$

Preuve de l'Etape 3 : On prouve que Cou($\mathrm{R_G, (R\ ou\ V)_D}$) est R

On vient d'obtenir Cou($\mathrm{V_G, (R\ ou\ V)_D}$) = V. Je note rv la répartition de R ou V qui est à droite et vr l'autre répartition de R et V obtenue en permutant R et V.

On connait donc Cou($\mathrm{V_G, rv}$) = V et Cou($\mathrm{O_G, O_D}$) = O on connait donc Cou($\mathrm{R_G, vr}$) : il est différent des deux précédents, c'est donc R

Mais vr est (comme rv) n'importe quelle distribution de R ou V, on vient donc d'obtenir Cou($\mathrm{R_G, (R\ ou\ V)_D}$) = R

On vient - par exemple - d'obtenir :

$$\mathrm{Cou(R, R, R, R, V, R, V, R) = R}$$

Preuve de l'Etape 4 : On prouve que Cou($\mathrm{O_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_\mathrm{D}$) est O

Je pars de rv une répartition de R ou V, j'en déduis comme ci-dessus vr par permutation R $\leftrightarrow$ V, et j'utilise les deux étapes précédentes pour Cou($\mathrm{V_G}$,vr)=V et Cou($\mathrm{R_G}$,vr)=R, en changeant les huit choix de couleurs on passe à Cou($\mathrm{O_G}, \mathrm{rv}$) qui ne peut être que O

On vient - par exemple - d'obtenir :

$$\mathrm{Cou}(\mathrm{O}, \mathrm{O}, \mathrm{O}, \mathrm{O}, \mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{V}) = \mathrm{O}$$

Preuve de l'Etape 5 : On prouve que Cou($\mathrm{R_G}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_\mathrm{D}$) est R

Soit maintenant rov une répartition de R ou O ou V, je fabrique autre-rv une répartition de R ou V qui pour chaque cas est différente de rov : quand rov est R on choisit V, quand rov est V on choisit R, quand rov est O on choisit ... n'importe quoi, les deux étapes précédentes disent que Cou($\mathrm{O_G}$,autre-rv) = O et Cou($\mathrm{V_G}$,autre-rv) = O, en changeant tout on arrive à Cou($\mathrm{R_G}, \mathrm{rov}$) = R

On vient d'obtenir :

$$\mathrm{Cou}(\mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{R}, \mathrm{R}, ?, ?, ?, ?) = \mathrm{R}$$

Preuve de l'Etape 6 :
On prouve que Cou($(\mathrm{R\ ou\ O})_{\mathrm{G}}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$) est R ou O (et deux autres)

On a vu lors de l'Etape 2, que Cou($\mathrm{V_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$) =V

Si on a une répartition $(\mathrm{R\ ou\ O})_{\mathrm{G}}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**), je nomme rov la répartition qui est à droite, comme ci-dessus je fabrique autre-rv une répartition de R ou V qui pour chaque cas est différente de rov et je considère Cou(**$(\mathrm{R\ ou\ O})_{\mathrm{G}}, \mathrm{rov}$**) et Cou(**$\mathrm{V_G}$**,autre-rv)=V : ils sont différents puisque tout a changé donc**

On vient d'obtenir : Cou($(\mathrm{R\ ou\ O})_{\mathrm{G}}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**) est R ou O**

De la même façon lors des étapes 3 et 4 on a vu Cou($\mathrm{R_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**) =R et Cou(**$\mathrm{O_G}, (\mathrm{R\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**) =O, comme ci-dessus (il faut soigneusement vérifier car les rôles des 3 couleurs ne sont pas identiques) on en déduit**

Cou($(\mathrm{O\ ou\ V})_{\mathrm{G}}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**) est O ou V**

Cou($(\mathrm{V\ ou\ R})_{\mathrm{G}}, (\mathrm{R\ ou\ O\ ou\ V})_{\mathrm{D}}$**) est V ou R**

Preuve de l'Etape 7 : On prouve que G est décisif

Soit g une répartition de couleurs à gauche, d' et d" deux répartitions pour la moitié droite

$\boxed{\textbf{SI}}$ les deux couleurs C'=Cou(g,d') et C"=Cou(g,d") sont différentes

Je choisis alors autre-g une répartition de C' et C" qui pour chaque case est différente de g et autre-d une répartition de R ou O ou V qui est pour chaque case différente des couleurs de d' et de d"

Cou(autre-g,autre-d) est donc différent de C' et C", mais l'étape 6 nous dit justement que autre-g n'ayant que des C' et des C" est soit C' soit C"

$\boxed{\textbf{AGAGA}}$: on a donc C'=C"

Preuve de l'Etape 8 : On prouve que quand deux parties sont décisives leur partie commune est encore décisive

On ne se limite plus maintenant à des moitié droites ou gauche, les parties concernées peuvent être quelconques

Je suppose que A et B sont deux parties décisives
je note C leur partie commune, Reste tout ce qui n'est ni dans A ni dans B
$A\backslash C$ **est formé des boitiers de A qui ne sont pas dans C et** $B\backslash C$ **est formé des boitiers de B qui ne sont pas dans C**

On considère alors trois répartitions de couleurs :

C	$A\backslash C$	$B\backslash C$	Reste	Couleur
R	R	O	V	R (1)
R	O	R	V	R (2)
R	O	O	O	? (3)

(1) : comme A est décisif, la couleur résultante est Rouge (2) : comme B est décisif, la couleur résultante est Rouge (3) : comme toutes les couleurs choisies sont non V le résultat est R ou O

- **si c'est R : on se retrouve comme à la fin de l'étape 1 : un Rouge monochrome vient de gagner contre un monochrome, il reste à refaire les étapes 1 à 7 pour conclure à <u>C est décisif</u>**
- $\boxed{\textbf{SI}}$ **c'est O : on se retrouve comme à la fin de l'étape 1 : un Orange monochrome vient de gagner contre un monochrome, il reste à refaire les étapes 1 à 7 pour conclure à Tout-sauf-C est décisif. En ce cas le résultat de la ligne 2 (c'est R) a été décidé par les O R V (et ce indépendemment du début C, c'est l'étape 7), il ne sera donc pas changé en remplaçant le R du début par des O. Mais on a alors O O R V : tout A est Orange, or A est décisif, le résultat doit être O. Comme O n'est pas R** $\boxed{\textbf{AGAGA}}$

Seul le premier des deux cas précédents est possible : C est décisif

Preuve de l'Etape 9 : On prouve qu'il y a une partie à 2 élements décisive

On a déja vu que Gauche (ou Droite) était décisive, on découpe maintenant nos huit cases en $\triangledown\ \triangledown\ \triangle\ \triangle\ \triangledown\ \triangledown\ \triangle\ \triangle$

On refait toute la preuve précédente pour obtenir que les $\triangledown$ ou que les $\triangle$ constituent une partie décisive, en prenant la partie commune avec Gauche (ou Droite) j'obtiens une partie de deux boitiers voisins qui est décisive

Preuve de l'Etape 10 : On prouve qu'il y a une partie à 1 élement décisive

On vient de voir qu'existe une partie décisive constituée de deux boitiers voisins
On découpe maintenant nos huit cases en $\bigtriangledown$ $\bigtriangleup$ $\bigtriangledown$ $\bigtriangleup$ $\bigtriangledown$ $\bigtriangleup$ $\bigtriangledown$ $\bigtriangleup$
On refait toute la preuve précédente pour obtenir que les $\bigtriangledown$ ou que les $\bigtriangleup$ constituent une partie décisive, en prenant la partie commune avec nos deux voisins j'obtiens une "partie de un boitier" qui est décisive : C'est lui le dictateur caché

D la preuve du théorème d'Arrow

On part donc d'une loi électorale L, on suppose U et I, on suppose aussi qu'il y a au moins 3 candidats, on veut prouver l'existence d'un dictateur. Commençons par introduire une définition : la partie P est décisive pour y contre x si

$$\forall s \in S : \quad [\forall v \in P \quad (x \quad s(v) \quad y)] \quad \Rightarrow [(x \; L(s) \; y)]$$

1 prouver que pour tous les (x,y), V est décisif pour x contre y et pour y contre x

On suppose dans les question 2 à 6 que $\exists s_0 \in S \quad \exists P \subseteq V \quad \exists (x, y) \in C^2$ tels que $[\forall v \in P \quad (x \; s_0(v) \; y)]$ et $[\forall v \notin P \quad (y \; s_0(v) \; x)]$ et $[(x \; L(s_0) \; y)]$

2 prouver que P est décisif pour y contre x

On suppose ci-dessous que $x \neq y$

3 Prouver que pour tout z de C, P est décisif pour y contre z. On considèrera pour cela le scrutin u unanime par blocs : pour les v de P $y > x > z$, pour les v de $V \backslash P$ $x > z > y$

4 Comme ci-dessus, montrer que pour tout z de C, P est décisif pour z contre x

On considère maintenant deux quelconques candidats s et t mais $\{s, t\} \neq \{x, y\}$

5 prouver que P est décisif pour s contre t

6 prouver enfin que P est décisif pour toute paire d'éléments de C

On considère maintenant une partie décisive D de cardinal minimum (depuis la première question on sait que cela existe), on sait qu'une telle D est non vide à cause de U, on note $D = \{v_1, ...v_k\}$, E=V\D, $D' = \{v_1\}$, D"=D\D′, il nous reste à prouver que D" est vide. Pour cela on nomme x,y,z trois candidats particuliers et on considère le scrutin s unanime par blocs

pour D' : $x < y < z$ pour D" : $z < x < y$ pour E : $y < z < x$

7 conclure à la preuve finale du théorème d'Arrow

E la preuve d'Arrow

1 Par U, (x,y) étant dans tous les s(v) est dans L(v)

2 Par I, le scrutin s_0 est le pire de ceux lors desquels P a préféré y à x, dans tout autre scrutin l'issue devra être au moins aussi bonne

3 Puisque P est décisif pour y contre x, dans L(u) on aura $y > x$. Comme il y a eu unanimité pour préférer x à z, dans L(u) on aura $x > z$. L(u) est donc $y > x > z$. Ce scrutin u a donc placé y devant z alors que tout $V\backslash P$ voulait le contraire, P est donc décisif pour y contre z

4 On considère le scrutin w unanime par blocs : pour les v de P $z > y > x$, pour les v de $V\backslash P$ $x > z > y$. Par U dans L(w) on aura $z > y$ et par décisivité de P pour y contre x on aura $y > x$. On a donc finalement $z > x$ selon les opinions de P et contre les opinions des autres : P est donc décisif pour z contre x

On considère maintenant deux quelconques candidats s et t mais $\{s, t\} \neq \{x, y\}$

5 parmi s et t l'un (au moins) est un $z \notin \{x, y\}$. d'après la question précédente, P est décisif pour z contre x et pour y contre z. En utilisant de nouveau la question précédente à partir de P décisif pour z contre x on en tire P décisif pour z contre $\{s, t\}\backslash z$ et symétriquement P décisif pour $\{s, t\}\backslash z$ contre z

6 Si m n'est ni x ni y, on utilise la question précédente pour $\{s, t\} = \{x, m\}$ pour montrer que P est décisif pour x contre m, on la réutilise avec $\{s, t\} = \{x, y\}$ par rapport à la paire $\{x, m\}$ et on a P décisif pour x contre y

7 $\boxed{\text{SI}}$ D" est non vide

on peut en effet considérer le scrutin indiqué. Comme D est décisif, on aura $x < y$, si on avait $z < y$ nous autions un scrutin rendant D" décisif pour y contre z, donc décisif (par Q1..Q6), on aura donc $y < z$: d' vient donc d'obtenir $x < z$ contre d" et e, donc (par Q1..Q6) D' est decisif et par notre hypothèse de cardinal minimum D" est vide

$\boxed{\text{AGAGA}}$ D" est donc vide, et v_1 est dictateur

F les bonus

1 l'informatisation d'Arrow

Les problèmes à implémenter sont :

- une loi vérifiant U et I est donnée, trouver d
- une loi vérifiant U et ¬D étant donnée fournir un contre exemple à I
- une loi vérifiant I et ¬D étant donnée fournir un contre exemple à U

Les question plus précises sont : quelles structures de données utiliser? quelles vont être les complexités des diverses phases? jusqu'à quelles valeurs de n et de p peut-on envisager de traiter cela?

De façon encore plus précise : si on doit parcourir l'ensemble S, comment le faire de la façon la moins coûteuse possible?

2 la structure cachée derrière tout cela ...

... est celle de filtre des parties décisives, pour les feux la preuve a clairement traité la stabilité par intersection, les autres propriétés sont évidentes; pour Arrow la preuve précédente n'est pas rédigée de façon à montrer la structure de filtre. C'est fait pages 33 à 43 du Volume 115 de The American Mathematical Monthly qui traite églisement des cas d'ensembles infinis : les ultrafiltres ne sont plus tous ponctuels, s'il existe bien (Zorn) des ultrafiltres majorant le filtre de Frechet, aucun entier n'est dictateur

Fête de la Science 2008

Les noms de marques

Nous avons tous été sondés

On a commencé par nous poser des question bien générales (nationalité, sexe, age ...) puis on nous a demandé quel nom de voiture nous plaisait, quelle couleur nous faisait penser à un frigo, et nos estimations tarifaires concernant le bien et le mal

Que fait-on après avec tout ça?

Tout comme pour les lois électorales il n'y a pas de méthode miracle pour "faire le bon choix", mais on va voir qu'on peut quand même utiliser ces informations.

Cela requiert de la vision "en dimension N" .... pour le faire comprendre j'ai fabriqué un exemple artificiel mais qui prétend faire (un peu) voir : les sondés seront repérés par leur fortune et leur âge, on ne s'intéresse qu'à leurs réponses concernant la couleur des savonettes : la teinte sera prise dans l'arc-en-ciel ce qui fait que l'on n'a que 3 paramètres numériques

Fête de la Science 2008

les Reports de voix

Ce qui suit est raconté avec un vocabulaire “Elections Législatives Françaises” : il y a deux tours, des abstentions, les candidats du second tour sont parmi ceux qui avaient été présents au premier tour

---

Vous avez tous lu des affirmations comme “53 % des électeurs d’Abel au premier tour ont reporté leurs votes sur Dupont”. Les votes étant à bulletins secrets, comment peut-on savoir cela ?

- Les résultats du Premier Tour constituent un tableau PT de données : on va mettre dans chaque ligne un des bureaux de vote, dans chaque colonne un des candidats du premier tour (la dernière colonne étant pour le candidat “abstention”)
- Les résultats du Second Tour constituent un tableau ST de données : on va mettre dans chaque ligne un des bureaux de vote, dans chaque colonne un des candidats du second tour (la dernière colonne étant pour le candidat “abstention”)
- Les Reports que l’on veut calculer sont des pourcentages : ce sont les reports des électeurs de C1 (un des candidats du premier tour) sur D2 (un des candidats du second tour), ces reports constituent eux aussi un tabeau R : c’est cela que l’on cherche

Un exemple simple devrait tout éclairer : les candidats du premier tour sont Bernard, Corinne, Damien (et Abstention bien sûr), on a 5 bureaux de vote (dont on suppose ici pour simplifier qu'ils ont tous 100 électeurs)

Premier Tour

	B	C	D	A
Bureau 1 :	30	30	20	20
Bureau 2 :	10	40	40	10
Bureau 3 :	10	50	20	20
Bureau 4 :	10	20	50	20
Bureau 5 :	20	30	30	20

Second Tour

	C	D	A
Bureau 1 :	30	35	35
Bureau 2 :	40	45	15
Bureau 3 :	50	25	25
Bureau 4 :	20	55	25
Bureau 5 :	30	40	30

L'objectif est de “relier” par des pourcentages le tableau PT au tableau ST

Premier Tour

	B	C	D	A
Bureau 1 :	**30**	**30**	**20**	**20**
Bureau 2 :	**10**	**40**	**40**	**10**
Bureau 3 :	**10**	**50**	**20**	**20**
Bureau 4 :	**10**	**20**	**50**	**20**
Bureau 5 :	**20**	**30**	**30**	**20**

Second Tour

	C	D	A
Bureau 1 :	**30**	**35**	**35**
Bureau 2 :	**40**	**45**	**15**
Bureau 3 :	**50**	**25**	**25**
Bureau 4 :	**20**	**55**	**25**
Bureau 5 :	**30**	**40**	**30**

On présume que les électeurs de C et de D ont maintenu leur préférences, il reste à voir comment se ront répartis ceux de B : dans ce cas (exprès simple) on voit vite qu'une solution consiste à partager à égalité les B entre D et A, cela peut se résumer par les trois tableaux : PT, ST et Reports

$$\mathbf{R} \rightarrow \boxed{\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0{,}5} & \mathbf{0{,}5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \mathbf{30} & \mathbf{30} & \mathbf{20} & \mathbf{20} \\ \mathbf{10} & \mathbf{40} & \mathbf{40} & \mathbf{10} \\ \mathbf{10} & \mathbf{50} & \mathbf{20} & \mathbf{20} \\ \mathbf{10} & \mathbf{20} & \mathbf{50} & \mathbf{20} \\ \mathbf{20} & \mathbf{30} & \mathbf{30} & \mathbf{20} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} \mathbf{30} & \mathbf{35} & \mathbf{35} \\ \mathbf{40} & \mathbf{45} & \mathbf{15} \\ \mathbf{50} & \mathbf{25} & \mathbf{25} \\ \mathbf{20} & \mathbf{55} & \mathbf{25} \\ \mathbf{30} & \mathbf{40} & \mathbf{30} \end{array}}$$

R $\rightarrow$

0	0,5	0,5
1	0	0
0	1	0
0	0	1

30	30	20	20
10	40	40	10
10	50	20	20
10	20	50	20
20	30	30	20

30	35	35
40	45	15
50	25	25
20	55	25
30	40	30

Diverses remarques :

- **les lignes 1 à 5 sont les 5 bureaux de vote**
- **les colonnes de la matrice de gauche "sont" les candidats de PremierTour**
- **les colonnes de la matrice en bas à droite "sont" les candidats de SecondTour**
- **pour lire ce diagramme : vous prenez une ligne du PremierTour, une colonne de Reports et vous ajoutez les produits des valeurs de PT par les pourcentages qui sont dans R pour obtenir (ici exactement) le terme de SecondTour**
- **On n'a bien sûr aucune certitude : les 30 du Bureau 5 qui avaient voté pour C peuvent fort bien avoir choisi D (en même temps les 30 de D changaient pour C)**
- **on avait 15 valeurs à obtenir dans ST et on disposait de 12 valeurs à régler dans R ... même pas puisque dans chaque ligne la somme vaut 1 = 100%, on n'avait que 8 choix possibles pour nos 15 conditions**

Ce problème s'écrit en notation matricielle :

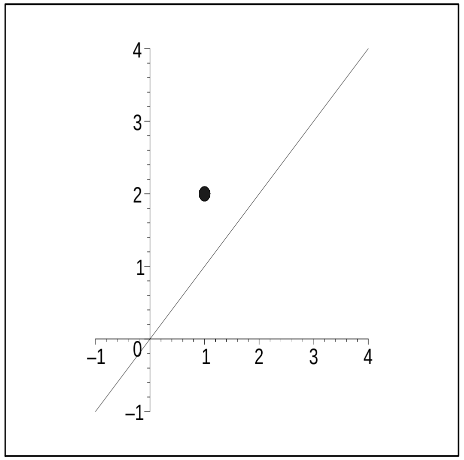
$$\mathbf{PT\ R = ST}$$

PT et ST sront connus c'est R que l'on veut déterminer les considérations de nombre de valeurs voulues et de nombre de valeurs à régler ont déjà fait deviner qu'il n'y a en général pas de solution

On va donc tenter de faire le "moins mauvais choix"

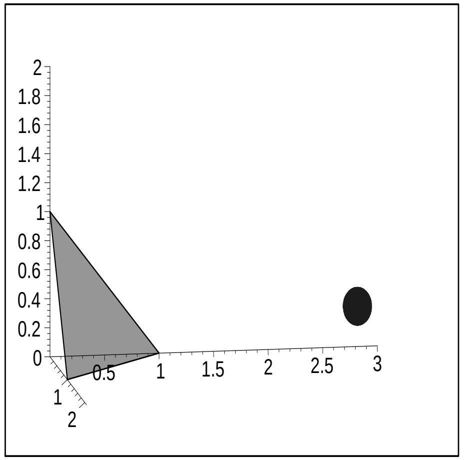
Deux exemples de structure voisines vont aider à voir :

Exemple 1 : je veux résoudre $\begin{cases} \mathbf{1\ r} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{1\ r} &= \mathbf{2} \end{cases}$



le point (r,r) va se situer sur la diagonale, le point (1,2) ... n'y est pas! Mais on voit d'évidence quelle est la meilleure approximation de (1,2) par un point de la diagonale : c'est le pied de la perpendiculaire menée de (1,2) sur la diagonale

Exemple 2 : je veux trouver le point du triangle qui est le plus près du gros point



Comme cette fois-ci le triangle est "limité" il ne suffit pas de projeter le point sur le plan du triangle : on tombera à côté, il faudra ensuite chercher le point du bord du triangle vert le plus proche de notre projection

Le problème du report des voix est une combinaison de ces deux exemples : toutes les possibilités de report constituent "comme une droite ou un plan" dans un espace de possibilités, le résultat du second tour .... est à côté, on projette sur les reports possibles et ... on obtient bien souvent un point qui n'est pas bon : on a des pourcentages < 0 **ou** $> 100\%$ **... aucun journal ne voudra publier cela! il faut alors se rapprocher du "super-triangle" des possibilités-vendables-aux-journaux**

La première opération est effectuée par "pseudo-inverse matriciel", la seconde est de la "projection convexe".

Les instituts qui font ce travail ne connaissant pas cela, ils utilisent une méthode approchée dite "de relaxation" qui est extrèmement lente : cela justifie du temps d'ordinateur et des tarifs plus élevés (ces informations datent d'il y a environ 20 ans)

Les notations et les choix

A liste de problèmes

1 impossibilité des classements multicritères

C'est tout ce qui a été raconté ici : il n'y a aucun moyen d'agglomérer des classements de façon raisonnable. Comme on en a tous besoin on fait quand même des choses "forcément mauvaises", on va essayer de minimiser le mal

2 les variables concernées

Sont celles de la statistique : moyenne, écart type

Une autre variable me sert depuis des années : c'est l'influence = le produit du coefficient (exprimé par exemple en pourcentage) par l'écart type

On y voit ainsi qu'un enseignant qui note entre 0 et 2, tout comme un enseignant qui note entre 18 et 20, divise par 10 l'influence de sa matière !

Un essai de passage au quantitatif sur ce sujet :

Disons que les notes vont de 0 à 20, leur moyenne est m, l'écart type σ. Il est évident que : si m=0 ou m=20 alors σ=0.

On devine aisément que si σ= 10 alors vous avez un effectif pair, une moitié a eu 0, l'autre moitié 20

On devine aussi que si m = 1 ou 19, σ va être "petit"

Ci dessous on creuse cette petitesse et on prouve une majoration générale de σ en fonction de m

---

Si f est une fonction de [a..b] dans [u..v], $\mathrm{m} = \frac{1}{\mathrm{b-a}} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f}$ **et** $\sigma = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{b-a}} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (\mathrm{f}-\mathrm{m})^2}$ **alors** $\sigma^2 \leq (\mathrm{m}-\mathrm{u})(\mathrm{v}-\mathrm{m})$

Première preuve : je traite le cas particulier [u..v] = [0..1], j'ai donc $\mathrm{f}^2 \leq \mathrm{f}$ **d'où**

$$\frac{1}{\mathrm{b-a}} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (\mathrm{f}-\mathrm{m})^2 = \frac{1}{\mathrm{b-a}} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (\mathrm{f}^2 - 2\mathrm{mf} + \mathrm{m}^2) \leq \frac{1}{\mathrm{b-a}} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (\mathrm{f} - 2\mathrm{mf} + \mathrm{m}^2) = \mathrm{m} - 2\mathrm{m}^2 + \mathrm{m}^2$$

donc $\sigma^2 + \mathrm{m}^2 \leq \mathrm{m}$ **: le point (m,σ) est dans le demi-disque de centre** $\frac{1}{2}$ **et de rayon** $\frac{1}{2}$

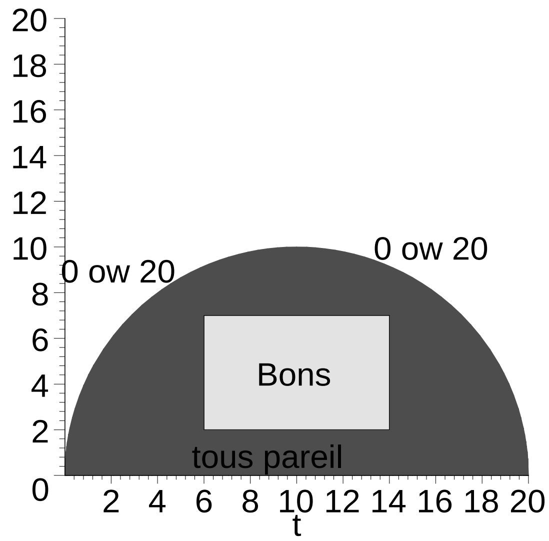
Avec nos hypothèses de finitude on a même le cas d'égalité : si $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f} - \mathrm{f}^2 = 0$ **c'est que l'on toujours eu** $\mathrm{f} = \mathrm{f}^2$ **et f n'a pris que 0 ou 1 comme valeurs**

Dans le cas d'un [u..v] général, on fait un changement affine pour transformer f en une fonction g d'image [0..1], on applique l'inégalité, on revient à f et on a $\sigma^2 \leq (\mathrm{m}-\mathrm{u})(\mathrm{v}-\mathrm{m})$

Seconde preuve : il suffit d'intégrer l'inégalité de convexité concernant la fonction carré sur [u..v] pour obtenir ... exactement la même chose

---

descriptif de la qualité d'une épreuve



Les point (m,σ) situés sur le demi cercle proviennent de l'égalité $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f$ soit f=0 ou 1, les seules notes attribuées ont été 0 et 20

Les points du diamètre du disque disent $\sigma^2 = \int_0^1 (f-m)^2 = 0$ tout le monde a eu la même note

On devine aisément quel type d'épreuves voient leurs répartitions de notes proches du demi-cercle supérieur (ou proche du diamètre), pour passer au quantitatif il faudrait un instrument de mesure de la "qualité d'une épreuve"

J'imagine qu'une très bonne épreuve peut se placer à un endroit non évident : quand un concours est "encombré" de candidats ridiculement forts et ridiculement faibles, il peut post-traiter les notes d'une épreuve avec un filtre qui dilate les notes autour de 10 (et crée donc des grands nombres de notes dans [0..1] et [19..20]), la moyenne n'a pas changé, l'écart s'est envolé, on est tout près du demi-cercle, et pourtant les étudiants que ce concours voulait trier finement son effectivement bien triés

3 Rectifications à postériori

voir `docimologie.mws`

4 Traitement des données manquantes

voir `notation_des_absents.mws`

5 Notation des Q.C.M.

Dans les années 80 (du moins pour ce que j'en sais) sont apparus les premiers Q.C.M. Il y en a eu en particulier en langues, et l'un des premiers mode d'emploi avait été "il n'y aura pas de pénalité pour les réponses fausses"

Je prend comme exemple des questions avec 4 propositions de réponse : 1 juste et 3 fausses, un candidat qui répond au hasard aura Vrai une fois sur 4 : noté sur 20 cela fait 5 .... l'influence de la matière vient d'être diminuée d'un quart

Un autre défaut des Q.C.M. est de trop aider en citant la bonne réponse : en lettres on pourra retrouver la bonne par étymologie, en maths il est parfois plus facile de tester une réponse que de la trouver soi même. Pour éviter cela on peut donner à choisir entre des réponses TOUTES fausses : on vous demande de localiser Andrezieux-Bouthéon sur une carte qui propose : Orleans, Roanne, Nice, Feurs, Bayonne : la somme des notes sera 0 et sur cet exemple j'en imagine 2 positives et 3 négatives

B Bibliographie

J'avais un lien internet vers les excellentes pages d'un Mr Abderhaman Azizi .... Les recherches avec ce nom amènent maintenant tous à des sites de baratin de gens qui ont le problème de vouloir montrer qu'ils sont sérieux

Ce qui reste de mieux ... c'est encore Wikipedia